Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Uma Introdução à Teoria de Jogos

Velani Dasi Soares

Orientador: Celso Melchiades Doria

Florianópolis

27 de fevereiro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Uma Introdução à Teoria de Jogos

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Velani Dasi Soares

Florianópolis

27 de fevereiro de 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°03/CCM/07.

Profª. Ms. Carmen Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Depto. de Matemática\ UFSC (Orientador)

Prof. Ms. Antônio Vladimir Martins
Depto. de Matemática\ UFSC

Prof. Dr. Luciano Bedin
Depto. de Matemática\ UFSC

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força para superar todos os momentos difíceis que encontrei durante esta caminhada.
Ao professor Celso Melchiades Dória pela amizade, competência e dedicação durante a orientação deste trabalho.
A todos aqueles professores com os quais tive contato durante esses anos e que foram fundamentais para minha formação.
Aos meus grandes amigos de curso e de vida: Raquel, Antônio e Bruna. Aos meus amigos: Cintia, Amélia, Cléia , Giovana e Cleber.
Aos meus pais Adenildo e Elza, minha irmã Vania, aos meus grandes avós Albertina, Aparecida e Felix, ao meu namorado Cassio e a todos os meus familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram durante todos esses anos.
Às funcionárias Silvia e Iara da secretaria do Curso pela atenção e empenho em ajudar sempre que necessário.

A meus pais.

Sumário

Introdução

Neste trabalho iremos discutir alguns tópicos da Teoria de Jogos, fazendo uso de alguns conceitos usados em programação linear, como por exemplo o *Método Simplexo*. Iniciaremos com o desenvolvimento de uma classe especial de jogos. Apresentaremos uma teoria que explique estes jogos. Começando com a definição de jogos de duas pessoas de soma constante, formularemos alguns princípios que nos guiarão para encontrar as possíveis soluções para os jogos apresentados.

Usando o teorema da dualidade do Capítulo 4 da página 43, vamos mostrar que tais jogos sempre tem solução, podendo eles serem estritamente determinados ou não estritamente determinados, desenvolvendo assim técnicas para encontrar tais soluções.

Ao decorrer deste trabalho daremos exemplos de alguns jogos, onde estaremos interessados em encontrar estratégias que maximizem o ganho de cada jogador, podendo estas estratégias serem puras ou mistas.

História

A teoria matemática para jogos foi desenvolvida pelo matemático húngaro John von Neumann[1] e pelo francês Emile Borel[2] mas o assunto só se difundiu no início da década de 40, com a publicação do livro *Theory of Games and Economic Behavior* de autoria de John von Neumann e do economista Oskar Morgenstern[3] , que estabeleceu a teoria de jogos como campo de estudo. Essa teoria trata o mundo social a partir de modelos baseados em jogos de estratégia, criando-se aí uma ferramenta que permite analisar o mundo mediante conceitos precisos. Desde então sua teoria tem sido expandida e tem sido aplicada a vários aspectos teóricos das ciências sociais. Esta teoria fornece informações valiosas sobre situações práticas e tem estimulado pesquisas em diversas áreas como economia, ciência política e psicologia.

Situações de conflito, ou qualquer outra forma de interação podem ser consideradas como **jogos** e as pessoas que participam desses eventos são chamados de **jogadores**.

---

[1] John von Neumann (1903-1957) nasceu na Hungria e foi para os Estados Unidos na década de 30. É considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Suas contribuições matemáticas vão desde os fundamentos da matemática, à mecânica quântica, ao cálculo de operadores e à teoria de máquinas computacionais e autômatos. Participou de muitos projetos de defesa durante a Segunda Guerra Mundial e ajudou a desenvolver a **bomba atômica**. Desenvolveu a teoria de jogos, culminando em seu trabalho em conjunto com Oskar Morgenstern, em 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*.

[2] Emile Borel (1871-1956) nasceu em Saint Affrique, na França. Autor de artigos matemáticos casou-se com uma escritora, pertenceu a círculos literários franceses e atuou na política, servindo na assembléia nacional por um tempo juntando-se a Resistência durante a Segunda Guerra Mundial. Em matemática contribuiu para teoria de funções, a teoria da medida e a teoria da probabilidade. Na década de 20, escreveu os primeiros artigos sobre a teoria dos jogos, enunciando o teorema minimax e discutindo aplicações à guerra e à economia.

[3] Oskar Morgenstern (1902-1977) nasceu na Alemanha e foi para os Estados Unidos em 1938. Foi professor de economia na Universidade de Princeton até 1970 e na Universidade de Nova York até sua morte. Em 1944, colaborou com John von Neumann no influente livro *Theory of Games and Economic Behavior*.

Capítulo 1

Introdução à Álgebra Linear

O objetivo inicial deste capítulo é introduzir os conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para desenvolver a **Programação Linear** e o **Método Simplexo**.

1.1 Definição de Matrizes

Definição 1.1 *Uma matriz $A_{m\times n}$ é um arranjo retangular de mn números reais (ou complexos) arrumados em m linhas horizontais e n colunas verticais:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

*A i-**ésima linha** de A é*

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq m);$$

*a j-**ésima coluna** de A é*

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (1 \leq j \leq n);$$

*Dizemos que A é m por n (e escrevemos $m \times n$). Se $m = n$, dizemos que A é **uma matriz quadrada de ordem n** e que os números $a_{11}, a_{22}, ..., a_{mn}$ formam a diagonal principal de A. Vamos nos referir ao número a_{ij}, que está na i-ésima linha e j-ésima coluna, como o elemento (i, j) ou o coeficiente (i, j) de A e escreveremos, freqüentemente, 1.1 na forma*

$$A = [a_{ij}]$$

Uma matriz $1 \times n$ ou $n \times 1$ é também chamada de um vetor de dimensão n e será denotada por letras minúsculas em negrito. Quando n está subentendido, chamaremos os vetores de dimensão n simplesmente de vetores.

Exemplo 1.1 *Os seguintes vetores, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, são, respectivamente,um vetor linha e um vetor coluna.*

1.2 Transposta de uma Matriz

Definição 1.2 *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, então a matriz $A^T = \begin{bmatrix} a_{ij}^T \end{bmatrix}_{n \times m}$, onde*

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

*é chamda de **transposta** de A. Portanto, a transposta de A é obtida trocando-se as linhas de A por suas colunas e vice-versa.*

Exemplo 1.2 *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo, as matrizes transpostas são:

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -\ 2 & 5 \\ 3 & -\ 2 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1 (Propriedade da transposta) *Se A e B são matrizes, então*

a) $(A^T)^T = A$

b) $(AB)^T = B^T A^T$

c) $(A+B)^T = A^T + B^T$

Demonstração 1.1 a) *Seja $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, então $A^T = (a_{ij})^T = a_{ji}$.*

Logo $(A^T)^T = (a_{ji})^T = a_{ij} = A$.

Portanto, $(A^T)^T = A$.

b) *Sejam, $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. Então, o elemento (i,j) de $(AB)^T$ é $(c_{ij})^T$.*

Por outro lado,

$$\begin{aligned} c_{ij}^T = c_{ji} &= \mathit{linha}\ j\ (A)\ \cdot\ \mathit{coluna}\ i\ (B) \\ &= a_{j1}\, b_{1i} + a_{j2}\, b_{2i} + \cdots + a_{jp}\, b_{pi} \\ &= a_{1j}^T\, b_{i1}^T + a_{2j}^T\, b_{i2}^T + \cdots + a_{pj}^T\, b_{ip}^T \qquad (1.2) \\ &= b_{i1}^T\, a_{1j}^T + b_{i2}^T\, a_{2j}^T + \cdots + b_{ip}^T\, a_{pj}^T \\ &= \mathit{linha}\ i\ (B^T)\ \cdot\ \mathit{coluna}\ j\ (A)^T = (B^T \cdot A^T)_{ij}, \end{aligned}$$

que é o elemento (i,j) de $B^T A^T$.

c) $[(A+B)^T]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = A^T + B^T$.

1.3 Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Nesta seção vamos desenvolver um método útil para resolver sistemas lineares. Esse método começa com a matriz aumentada de um sistema linear dado e gera uma matriz de uma forma particular. Esta nova matriz representa um sistema linear que tem exatamente as mesmas soluções que o sistema dado. Por exemplo, se

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

representa a matriz aumentada de um sistema linear, então a solução é facilmente encontrada a partir das equações correspondentes

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & 2x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_4 & = & -5 \\ & & & x_3 + & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

O objetivo desta seção é manipular a matriz aumentada representando o sistema linear dado até chegar a uma forma a partir da qual a solução possa ser facilmente encontrada.

Definição 1.3 *Uma matriz $m \times n$ está na forma escada reduzida por linhas se ela satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *Todas as linhas nulas (isto é, com todos os elementos iguais a 0), se existirem, ocorrem abaixo de todas as linhas não-nulas.*

(b) *O primeiro (lendo-se da esquerda para a direita) elemento não-nulo de cada linha não-nula é 1.*

(c) *Se as linhas i e $i+1$ são duas linhas sucessivas não-nulas, então o primeiro elemento não-nulo da linha $i+1$ está à direita do primeiro elemento não-nulo da linha i.*

(d) *Se uma coluna contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha, então todos os outros elementos desta coluna são iguais a zero.*

Exemplo 1.3 *As matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

estão na forma escada reduzida por linhas.

Definição 1.4 *Uma operação elementar nas linhas de uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *é uma das seguintes operações:*

(a) *Permuta das linhas* r *e* s *de* A*, isto é , troca-se* $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ *por* $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ *e* $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ *por* $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$*;*

(b) *Multiplicação da* r*-ésima linha de* A *por* $c \neq 0$*, isto é, troca-se* $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ *por* $ca_{r1}, ca_{r2}, \ldots, ca_{rn}$*;*

(c) *Adição de* d *vezes a* r*-ésima linha de* A *à* s*-ésima linha de* A*,* $r = s$*, isto é, troca-se* $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ *por* $a_{s1} + da_{r1}, a_{s2} + da_{r2}, \ldots, a_{sn} + da_{rn}$.

Definição 1.5 *Uma matriz* $A_{m \times n}$ *é equivalente por linhas a uma matriz* $B_{m \times n}$ *se* B *pode ser obtida aplicando-se uma seqüência finita de operações elementares nas linhas de* A*.*

Exemplo 1.4 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

multiplicando a primeira linha por 2*;*

permutando-se a segunda linha com a terceira; obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

multiplicando-se a terceira linha de B *por* 2 *e somando-se com a segunda linha, temos:*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

que é equivalente por linhas a matriz A.

Ou seja, observamos que as matrizes A, B e C são equivalentes por linhas.

Capítulo 2

Introdução à Programação Linear

Neste capítulo introduziremos as idéias e técnicas básicas de programação linear. A partir de alguns exemplos de problemas de programação linear, os formularemos matematicamente e resolveremos os mesmos utilizando um método algébrico.

2.1 Modelos de Programação Linear

Em muitos problemas encontrados em administração e na indústria, estamos interessados em tomar decisões que irão maximizar ou minimizar algumas quantidades. Por exemplo, o gerente de uma fábrica pode querer determinar a maneira mais econômica de enviar seus produtos da fábrica para os mercados, um hospital pode querer produzir uma dieta que satisfaça certas necessidades nutricionais a um custo mínimo, um investidor pode querer selecionar investimentos que irão maximizar seus lucros, ou um produtor pode querer misturar ingredientes, sujeito a determinadas especificações, para maximizar o lucro. Daremos exemplos de problemas de programação linear e mostraremos como formular modelos matemáticos para eles.

Exemplo 2.1 *Um pequeno fabricante de produtos fotográficos prepara dois tipos de reveladores de filme por dia, Fino e Extrafino, usando como matéria-prima as soluções* A *e* B*. Suponha que cada litro do revelador Fino contém* 2 *medidas da solução* A *e* 1 *medida da solução* B*, enquanto que o revelador Extrafino contém* 1 *medida da solução* A *e* 2 *medidas da solução* B*. Suponha, também, que o lucro em cada litro do revelador*

Fino é de 8 *centavos, enquanto que o lucro em cada litro do revelador Extrafino é de* 10 *centavos. Se a firma tem disponíveis* 50 *medidas da solução* A *e* 70 *da solução* B *por dia, quantos litros ela deve produzir de cada tipo de revelador por dia para maximizar o lucro (supondo que ela pode vender tudo que produzir)?*

Formulação Matemática: Sejam x_1 e x_2, respectivamente, o número de litros dos reveladores Fino e Extrafino a serem produzidos por dia. Como cada litro do revelador Fino contém 2 medidas da solução A e cada litro do revelador Extrafino contém 1 medida da solução A, a quantidade total da solução A necessária é

$$2x_1 + x_2.$$

Analogamente, como cada litro do revelador Fino contém 1 medida da solução B e cada litro do revelador Extrafino contém 2 medidas da solução B, a quantidade total da solução B necessária é

$$x_1 + 2x_2.$$

Por outro lado, como temos apenas 50 medidas da solução A e 70 medidas da solução B, temos que ter

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 70.$$

É claro que x_1 e x_2 não podem ser negativos, logo, temos, também,

$$x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \geq 0.$$

Como o lucro em cada litro dos reveladores Fino e Extrafino é de, respectivamente, 8 e 10 centavos, o lucro total (em centavos) é

$$z = 8x_1 + 10x_2.$$

Nosso problema pode ser, então, enunciado matematicamente da seguinte forma: encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 8x_1 + 10x_2 \tag{2.1}$$

sujeito às seguintes restrições, que têm que ser satisfeitas por x_1 e x_2:

$$2x_1 + x_2 \leq 50;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 70;$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Esse exemplo é típico de problemas de programação linear. Iremos agora formular o problema de forma geral: "Encontrar os valores de $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$; que irão minimizar ou maximizar

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.2}$$

sujeito a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & (\leq) & (\geq) & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & (\leq) & (\geq) & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & (\leq) & (\geq) & = & b_m \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (1 \leq j \leq n) \tag{2.4}$$

onde apenas um dos símbolos $\leq$, $\geq$, $=$ ocorrem em cada linha de 2.3. A função linear em 2.2 é chamada de **função objetiva**. As igualdades ou desigualdades em 2.3 e 2.4 são os **vínculos** ou **restrições**. O termo **linear** em programação linear significa que a função objetiva 2.2 e cada um dos vínculos em 2.3 são lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A palavra "programação", que não deve ser confundida com seu uso na programação de computadores, refere-se a aplicações em problemas de planejamento ou alocação.

Acabamos de formular matematicamente um problema de maximização, vejamos agora como se comporta um problema de minimização diante da formulação matemática.

Exemplo 2.2 *Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal de forma a conseguir uma certa quantidade de nutrientes a um custo mínimo.*

Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades existentes em cada tipo de ração ($g\backslash kg$) constam na tabela abaixo:

	Ração		
Ingredientes Nutritivos	*Granulado*	*Farinha*	*Quantidade mínima requerida*
Carboidratos	*20*	*50*	*200*
Vitaminas	*50*	*10*	*150*
Proteínas	*30*	*30*	*210*
Custo (R\kg)	*10*	*5*	

Formulação Matemática Designemos por x_1 e x_2 as quantidades (em kg) de granulado e farinha, repectivamente, a fornecer diariamente a cada animal.

O custo total (em Reais) para alimentar diariamente cada animal é:

$$z = 10x_1 + 5x_2$$

O objetivo do criador de porcos é minimizar o custo total, sabendo, que as suas possibilidades de escolha estão limitadas pelas seguintes restrições relativas ao regime alimentar de cada animal:

$$20x_1 + 50x_2 \geq 200,$$

onde o lado esquerdo da desigualdade refere-se a quantidade (g) de carboidratos a fornecer diariamente, enquanto que o lado direito refere-se a quantidade mínima (g) de carboidratos por dia.

Analogamente para as vitaminas,

$$50x_1 + 10x_2 \geq 150,$$

e para as proteínas,

$$30x_1 + 30x_2 \geq 210.$$

Sabendo que a quantidade de ração necessária diariamente é não negativa, isto é, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, tem-se, finalmente, um modelo de programação linear que permite estabelecer a dieta dos porcos:

Minimizar

$$z = 10x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcl} 20x_1 & + & 50x_2 & \geq & 200 \\ 50x_1 & + & 10x_2 & \geq & 150 \\ 30x_1 & + & 30x_2 & \geq & 210 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

2.2 Problema Padrão de Programação Linear

Vamos agora restringir nossa atenção a uma classe especial de problemas de programação linear, os problemas do tipo padrão. Mostraremos que todo problema de programação linear pode ser transformado em um problema desse tipo especial.

Definição 2.1 *O problema a seguir refere-se a um problema padrão de programação linear, assim enunciado: Encontre valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que irão maximizar*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.5}$$

Sujeito aos vínculos

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \right. \tag{2.6}$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \tag{2.7}$$

Exemplo 2.3 *O seguinte problema de programação linear:*

$$\textit{Minimize } z = 3x_1 - 4x_2$$

sujeito a

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

não é um problema de programação linear padrão, já que a função objetiva deve ser minimizada e não maximizada.

Exemplo 2.4 *O seguinte problema de programação linear:*

$$Maximize\ z = 8x_1 + 10x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 70$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

é um problema de programação linear padrão, pois a função objetiva deve ser maximizada e as desigualdades dos vínculos são todas $\leq$.

Exemplo 2.5 *O problema de programação linear:*

$$Maximize\ z = 12x_1 - 15x_2$$

sujeito a

$$3x_1 - x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

não é um problema de programação linear padrão, já que uma das desigualdades é da forma $\geq$; e em um problema padrão de programação linear, todas as desigualdades em 2.6 são da forma $\leq$.

Exemplo 2.6 *O problema de programação linear:*

$$Maximize\ z = 8x_1 + 10x_2$$

sujeito a

$$3x_1 + x_2 = 4$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

não é um problema padrão de programação linear, já que o primeiro vínculo é uma equação e não uma desigualdade da forma $\leq$.

Todo problema de programação linear pode ser transformado em um problema padrão de programação linear.

2.2.1 Transformando um Problema de Minimização em um Problema de Maximização

Todo problema de maximização pode ser visto como um problema de minimização, e vice-versa. Isso segue da seguinte observação:
O mínimo de

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \text{ é igual ao máximo de } -(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \text{ e vice-versa .} \tag{2.8}$$

Considere a desigualdade $d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n \geq b$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por -1, trocamos o sinal $\geq$ por $\leq$, isto é,

$$-d_1x_1 - d_2x_2 - \cdots - d_nx_n \leq -b.$$

Exemplo 2.7 *Considere o problema de programação linear:*

$$\textit{Minimize } w = 5x_1 - 2x_2$$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 &\geq -5\\
3x_1 + 2x_2 &\leq 12\\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Usando 2.8 e multiplicando a primeira desigualdade em 2.9 por -1, obtemos o seguinte problema padrão de programação linear:

$$\text{Maximize } z = -(5x_1 - 2x_2) = -5x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + 3x_2 &\leq 5\\
3x_1 + 2x_2 &\leq 12\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Uma vez resolvido esse novo problema, o valor mínimo de w será menos (oposto) o valor máximo de z.

2.2.2 Variáveis de Folga

Mudar algumas igualdades para desigualdades da forma $\leq$, não é muito difícil. Deste modo o exemplo 2.2 pode ser transformado em um problema padrão de programação linear. Como não vamos encontrar problemas de programação linear do tipo do exemplo 2.2, não vamos continuar a analisá-lo.

Não é fácil tratar sistemas de desigualdades lineares algebricamente. Vamos, então, transformar nosso problema de programação linear em um problema onde precisamos encontrar variáveis não-negativas que maximizam uma função linear objetiva e satisfazem um sistema de equações lineares. Toda solução do problema dado gera uma solução do novo problema e, reciprocamente, toda solução do novo problema gera uma solução do problema dado.

Considere o vínculo

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \leq b. \tag{2.10}$$

Como o lado esquerdo de 2.10 não é maior do que o direito, podemos transformar 2.10 em uma equação adicionando a variável desconhecida **não-negativa u** a seu lado esquerdo, obtendo

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + u = b. \tag{2.11}$$

A quantidade u em 2.11 é chamada de uma variável de folga, já que ela corresponde a folga entre os dois lados da desigualdade.

Vamos agora transformar cada um dos vínculos em 2.3 (que, estamos supondo, representar um problema padrão de programação linear com desigualdades apenas do tipo $\leq$) em equações introduzindo uma variável de folga não-negativa. Logo, a $i-$ésima desigualdade

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m) \tag{2.12}$$

é transformada na equação

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (1 \leq i \leq m),$$

introduzindo-se as variáveis de folga não-negativas x_{n+i}. Nosso novo problema pode, então, ser enunciado da seguinte maneira:
Encontre valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ que irão maximizar

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.13}$$

sujeito a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & & + & x_{n+2} & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & & & + & x_{n+m} & = & b_m \end{array}\right. \tag{2.14}$$

$$x_i \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0. \quad (2.15)$$

Esse novo problema tem m equações e $m+n$ incógnitas. Resolver o problema original é equivalente a resolver o novo problema no sentido que descrevemos a seguir.

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma solução viável do problema dado como definido por 2.2, 2.3 e 2.4, então:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Além disso, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazem cada um dos vínculos em 2.3.
Sejam x_{n+i}, $(1 \leq i \leq m)$ definidos por

$$x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ \ldots \ - a_{in}x_n.$$

Então, x_{n+i} é a diferença entre os lados direito e esquerdo da desigualdade 2.12. Logo,

$$x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$$

de modo que $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ satisfazem 2.14 e 2.15.

Reciprocamente, suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ satisfazem 2.14 e 2.15. Então, é claro que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazem 2.3 e 2.4.

Exemplo 2.8 *Considere o problema do exemplo 2.2. Introduzindo as variáveis de folga u e h, formulamos nosso novo problema da seguinte maneira: encontre os valores de x_1, x_2, u e h que irão maximizar*

$$z = 8x_1 + 10x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + x_2 + u = 50$$

$$x_1 + 2x_2 + h = 70$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u \geq 0, h \geq 0.$$

A variável de folga u é a diferença entre a quantidade total da solução A disponível, 50 *medidas, e a quantidade $2x_1 + x_2$ da solução A utilizada de fato. A variável de folga h é a diferença entre a quantidade total da solução B disponível,* 70 *medidas, e* *a quantidade* $x_1 + 2x_2$ *da solução* B *utilizada de fato. Considere a solução viável do problema dado*

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 10,$$

obtemos as variáveis de folga

$$u = 50 - 2(5) - 10 = 50 - 10 - 10 = 30$$

e

$$h = 70 - 5 - 2(10) = 70 - 5 - 20 = 45$$

de modo que

$$x_1 = 5, x_2 = 10, u = 30, h = 45$$

é uma solução viável do novo problema. É claro que a solução $x_1 = 5, x_2 = 10$*, não é uma solução ótima, já que* $z = 8(5) + 10(10) = 140$ *e pode ser verificado que o valor máximo de* z *é* $z = 380$ *com*

$$x_1 = 10, x_2 = 30.$$

Neste caso, a solução ótima correspondente do novo problema é

$$x_1 = 10, x_2 = 30, u = 0, h = 0.$$

Capítulo 3

O Método Simplexo

O Método simplexo para resolução de problemas de programação linear foi desenvolvido por `George B. Dantzig`[1] com para em conexão com seu trabalho de planejamento para o governo federal americano. Vamos apresentar neste capítulo os aspectos essenciais do método, ilustrando-o com exemplos. Diversas demonstrações serão omitidas. O leitor interessado em maiores detalhes deve consultar as referências dadas ao final desta obra.

É conveniente introduzir a terminologia matricial para continuar nossa discussão de programação linear. Para tal fim, observemos o seguinte problema padrão de programação linear:

$$\text{maximize } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3.1}$$

sujeito a

[1]George B. Dantzig (1914-) nasceu em Portland, Oregon. Fez o bacharelado na Universidade de Maryland, o mestrado na Universidade de Michegan e o doutorado na Universidade da Califórnia em Berkeley. Seu método simplexo para resolução de problemas de programação linear, desenvolvido em 1947, foi uma contribuição primordial na área da pesquisa operacional, que acabava de se desenvolver. O rápido crescimento do poder computacional aliado a seu custo decrescente produziu um grande número de implementações computacionais do método Simplexo e resultou numa economia de bilhões de dólares para indústria e governo americano.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \tag{3.3}$$

pode ser reescrito como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

então o problema dado pode ser enunciado da seguinte maneira: encontre um vetor $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$ que irá maximizar a função objetiva

$$z = c^T\mathbf{x} \tag{3.4}$$

sujeito a

$$A\mathbf{x} \leq b \tag{3.5}$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{x} \geq 0$ significa que cada coeficiente de $\mathbf{x}$ é não-negativo e $A\mathbf{x} \leq b$ significa que cada coeficiente de $A\mathbf{x}$ é menor ou igual ao coeficiente correspondente de b.

Um vetor $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo 3.5 e 3.6 é chamado de uma solução viável do problema dado, e uma solução viável que maximize a função objetiva 3.4 é chamado de uma solução ótima.

Exemplo 3.1 *Podemos escrever o problema do Exemplo 2.1 da seção 2.1 em forma matricial da seguinte maneira: encontre um vetor* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *que irá maximizar*

$$z = \begin{bmatrix} 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluções víaveis incluem os vetores

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Uma solução ótima é o vetor

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

O novo problema com variáveis de folga também pode ser colocado em forma matricial: encontre um vetor $\mathbf{x}$ que irá maximizar

$$z = c^T \mathbf{x} \tag{3.7}$$

sujeito a

$$A\mathbf{x} = b \tag{3.8}$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \tag{3.9}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad e \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Um vetor $\mathbf{x}$ que satisfaça 3.8 e 3.9 é uma **solução viável** do novo problema, e uma solução viável que otimiza a função objetiva 3.7 é uma **solução ótima**. Ao longo deste capítulo, vamos fazer a hipótese adicional de que, em todos os problemas de programação linear do tipo padrão,

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0.$$

3.1 Problema Ilustrativo

Encontre os valores de x_1, x_2 que irão maximizar

$$z = 8x_1 + 10x_2 \tag{3.10}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 70 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{3.12}$$

O novo problema com variáveis de folga u e h é: encontre x_1, x_2, u e h que irão maximizar

$$z = 8x_1 + 10x_2 \tag{3.13}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + u &= 50 \\ x_1 + 2x_2 + h &= 70 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$x_1, x_2, u \text{ e } h \geq 0. \tag{3.15}$$

Definição 3.1 *O vetor x em $\mathbb{R}^{n+m}$ é chamado de uma **solução básica** para o novo problema se for obtido fazendo-se n das variáveis em 3.8 iguais a zero e resolvendo-se para as m variáveis restantes. Essas m variáveis são chamadas de **variáveis básicas**, e as n variáveis que são igualadas a zero são as **variáveis não-básicas**. O vetor $\boldsymbol{x}$ é uma **solução viável básica** se for uma solução básica que satisfaz 3.9.*

Então, para resolver um problema de programação linear, precisamos apenas procurar soluções viáveis básicas. Em nosso exemplo ilustrativo, podemos selecionar duas das quatro variáveis x_1, x_2, u e h como variáveis não-básicas igualando-as a zero e resolvendo para as duas variáveis restantes, isto é, resolvemos para as variáveis básicas. Então, fazendo

$$x_1 = x_2 = 0,$$

temos

$$u = 50, \quad h = 70.$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica que nos fornece a solução viável:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para o problema original especificado por 3.10, 3.11 e 3.12. As variáveis x_1 e x_2 são não-básicas e as variáveis u e h são básicas. Escolhendo as variáveis x_1 e u como não-básicas ($x_1 = u = 0$), obtemos $x_2 = 50$ e $h = -30$. O vetor

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica que não é possível, pois h é negativo. Ela corresponde a um valor que não é uma solução viável do problema original. Colocamos na tabela abaixo todas as escolhas possíveis para as soluções básicas. Como se pode ver nesse exemplo e demonstrar no caso geral, toda solução viável básica determina um ponto extremo e, reciprocamente, cada ponto extremo determina uma solução viável básica. Um método para resolver nosso problema de programação linear seria obter todas as soluções básicas, descartar as que não forem possíveis e calcular a função objetiva em cada solução viável básica, selecionando aquelas para as quais obtemos um valor máximo para a função objetiva. O número de soluções básicas é

$$\begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+m)!}{m!n!}$$

x_1	x_2	u	h	Tipo de Solução
0	0	50	70	Solução viável básica
0	50	0	-30	Não é uma solução viável básica
0	35	15	0	Solução viável básica
25	0	0	45	Solução viável básica
70	0	-90	0	Não é uma solução viável básica
10	30	0	0	Solução viável básica

3.2 Selecionando uma Solução Viável Básica

Podemos escolher todas as variáveis originais (as que não são de folga) como nossas variáveis não-básicas, igualando-as a zero. No nosso exemplo, fazemos

$$x_1 = x_2 = 0$$

e resolvemos para u e h

$$u = 50, h = 70.$$

Nossa solução viável básica é o vetor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

É conveniente desenvolver um método tabular para mostrar o problema dado e a solução viável básica inicial. Primeiro, escrevemos 2.1 como a equação

$$-8x_1 - 10x_2 + z = 0 \tag{3.16}$$

com z sendo considerada uma outra variável. Formamos, agora, o **quadro inicial** abaixo. As variáveis x_1, x_2, u, h e z são escritas na primeira linha como títulos das colunas correspondentes. Os vínculos 3.14 são colocados nas linhas seguintes e a equação 3.16 fica na última linha. A última linha do quadro é chamada de **linha objetiva**. Ao longo do lado esquerdo do quadro indicamos a variável básica na equação correspondente. Então, u é uma variável básica na primeira equação e h é uma variável básica na segunda equação.

Quadro 1

	x_1	x_2	u	h	z	
u	2	1	1	0	0	50
h	1	2	0	1	0	70
	-8	-10	0	0	1	0

Uma variável básica também pode ser descrita como uma variável, diferente de z, que está presente em exatamente uma equação, onde aparece com o coeficiente $+1$. No quadro, o valor da variável básica é dado explicitamente na coluna mais à direita. O quadro inicial mostra os valores das variáveis básicas u e h; as variáveis não-básicas assumem os valores

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0.$$

O valor da função objetiva para essa solução viável básica é

$$c_1x_1 + c_2x_2 + 0(u) + 0(h) = -8(0) - 10(0) + 0(u) + 0(h) = 0,$$

que é o elemento na última coluna da linha objetiva. É claro que essa solução não é ótima, pois, usando a última linha do quadro inicial, podemos escrever

$$z = 0 + 8x_1 + 10x_2 - 0u - 0h. \tag{3.17}$$

O valor de z, então pode ser aumentado aumentando-se x_1 ou x_2, já que essas duas variáveis aparecem em 3.17 com coeficientes positivos. Como 3.17 contém termos com coeficientes positivos se e somente se a linha objetiva do nosso quadro inicial tem elementos negativos nas colunas associadas as variáveis, vemos que podemos aumentar z aumentando qualquer variável que tenha um elemento negativo em sua coluna correspondente na linha objetiva. Podemos, assim, obter o critério de otimização descrito a seguir para determinar se uma solução viável indicada em um quadro é uma solução ótima gerando um valor máximo para a função objetiva z. Em geral, para o problema dado por 3.7, 3.8 e 3.9, o quadro inicial é o dado abaixo.

Quadro 2

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	z	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	0	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	1	0

Critério de Otimização

Se a linha objetiva de um quadro não tem elementos negativos nas colunas associadas às variáveis, então a solução indicada é ótima e podemos parar nossos cálculos. Veremos isto nas seções seguintes.

3.3 Selecionando a Variável de Entrada

Se a linha objetiva de um quadro tem elementos negativos nas colunas associadas às variáveis, então a solução indicada não é ótima e temos que continuar a procurar uma solução ótima. O método simplexo move-se de um ponto extremo para outro ponto extremo adjacente de modo a aumentar o valor da função objetiva. Isso é feito aumentando-se uma variável de cada vez. Podemos obter o maior aumento por vez para z escolhendo a variável que corresponde ao número mais negativo na linha objetiva. No quadro 1, o elemento mais negativo na linha objetiva é -10, na coluna x_2, de modo que x_2 é a variável a ser aumentada. A variável a ser aumentada é chamada de variável de entrada, pois ela se tornará uma variável básica na próxima iteração, entrando no conjunto de variáveis básicas. Se existirem diversos candidatos para a variável de entrada, escolha um. Sendo que, a coluna em que se encontra a variável de entrada é chamada de coluna do pivô e a linha de linha do pivô. Um aumento em x_2 tem que ser acompanhado por uma diminuição em algumas das outras variáveis. Isso pode ser visto se resolvermos as equações 3.14 para u e h:

$$u = 50 - 2x_1 - x_2$$

$$h = 70 - x_1 - 2x_2.$$

Como vamos aumentar apenas x_2, mantemos $x_1 = 0$ e obtemos

$$\begin{aligned} u &= 50 - x_2 \\ h &= 70 - 2x_2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

de modo que, quando x_2 aumenta, tanto u quanto h diminuem. As equações 3.18 também mostram o quanto podemos aumentar x_2. Em outras palavras, como u e h não podem ser negativos, temos

$$x_2 \leq \frac{50}{1} = 50$$

$$x_2 \leq \frac{70}{2} = 35.$$

Vemos agora que o aumento permitido para x_2 não pode ser maior do que o menor dos quocientes $\frac{50}{1}$ e $\frac{70}{2}$. Fazendo $x_2 = 35$, obtemos a seguinte solução viável básica:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 35, \quad u = 15, \quad h = 0$$

As variáveis básicas são x_2 e u; as variáveis x_1 e h são não-básicas. A função objetiva para essa solução tem agora o valor

$$z = 8(0) + 10(35) + 0(15) + 0(0) = 350,$$

que é muito melhor do que o valor inicial 0.

3.4 Selecionando a Variável de Saída

A variável $h = 0$ não é básica e é chamada de variável de saída, pois saiu do conjunto de variáveis básicas. A coluna da variável de entrada é a coluna do pivô; a linha da variável de saída é a linha do pivô. Vamos analisar agora a seleção da variável de saída. A escolha dessa variável está intimamente relacionada a determinação de quanto queremos aumentar a variável de entrada (x_2, no nosso exemplo). Para obter esse número formamos os quocientes (chamados de quocientes ϕ) dos elementos acima da linha objetiva na última coluna à direita do quadro pelos elementos correspondentes na coluna do pivô. O menor desses quocientes nos diz de quanto podemos aumentar a variável de entrada. A variável básica associada à linha para a qual temos o menor quociente (a linha do pivô) é, então, a variável de saída. No nosso exemplo, os quocientes ϕ, formados pela última coluna à direita e pela coluna x_2 são $\frac{50}{1}$ e $\frac{70}{2}$. O menor desses quocientes, 35, corresponde à segunda linha, o que significa que a segunda linha é a linha do pivô, e a variável básica, h, associada é a variável de saída que não será mais básica. Se não escolhermos o menor quociente, então uma das variáveis na nova solução será negativa, logo a solução não será mais uma solução viável. O que acontece se existem elementos nulos ou negativos na coluna do pivô? Se algum elemento na coluna do pivô é negativo; então o quociente correspondente também é negativo; nesse caso, a equação associada ao quociente negativo não impõe restrição alguma em quanto podemos aumentar a variável de entrada. Suponha, por exemplo, que a coluna x_2 no nosso quadro inicial seja

$$\begin{bmatrix} -\ \ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ em vez de } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então, em lugar de 3.18, teríamos

$$u = 50 + 3x_2$$

$$h = 70 - 2x_2,$$

e, como u não pode ser negativo, teríamos

$$x_2 \geq -\frac{50}{3},$$

o que não coloca limitação alguma em quanto podemos aumentar x_2. Se algum elemento na coluna do pivô for nulo o quociente correspondente não pode ser formado (não podemos dividir por zero) e, novamente, a equação associada não limita de quanto podemos aumentar x_2. Portanto, ao formar os quocientes, usamos apenas os elementos positivos acima da linha do pivô na coluna do pivô.

Se todos os elementos acima da linha objetiva na coluna do pivô são nulos ou negativos, então a variável de entrada pode ser escolhida tão grande quanto quisermos. Isso significa que o problema não tem solução finita ótima. Temos agora que obter um novo quadro indicando as novas variáveis básicas e as novas soluções básicas. Resolvendo a segunda equação em 3.14 para x_2, obtemos

$$x_2 = 35 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}h, \tag{3.19}$$

e, substituindo essa expressão para x_2 na primeira equação em 3.14, temos que

$$\frac{3}{2}x_1 + u - \frac{1}{2}h = 15. \tag{3.20}$$

Dividindo por 2 (o coeficiente de x_2) a segunda equação em 3.14, ela fica

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}h = 35. \tag{3.21}$$

Substituindo x_2 por 3.19 em 3.16, obtemos

$$-3x_1 + 5h + z = 350. \tag{3.22}$$

Como $x_1 = 0$, $h = 0$, obtemos o valor de z para a solução viável básica atual:

$$z = 350.$$

As equações 3.20, 3.21 e 3.22 geram nosso quadro 3:

Quadro 3

	x_1	x_2	u	h	z	
u	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	15
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	35
	-3	0	0	5	1	350

Comparando o Quadro 1 com o Quadro 3, observamos que podemos transformar o primeiro no último usando as operações elementares nas linhas descritas a seguir.

Etapa 1: Localize e marque com um círculo em volta o elemento na linha e coluna dos pivôs. Esse elemento é o **pivô**. Marque a coluna do pivô colocando uma seta $\downarrow$ acima da variável de entrada e marque a linha do pivô colocando uma seta $\leftarrow$ à esquerda da variável de saída.

Etapa 2: Se o pivô é k, multiplique a linha do pivô por $\frac{1}{k}$, transformando o elemento pivô em 1.

Etapa 3: Some múltiplos apropriados da linha do pivô a todas as outras linhas (inclusive a linha objetiva) de modo a transformar em zero todos os outros elementos da coluna do pivô, isto é, todos exceto o elemento pivô, que continua 1.

Etapa 4: No novo quadro, troque a variável na linha do pivô colocando a variável de entrada.

Essas quatro etapas formam um processo conhecido como **eliminação de pivô**.

Utilizando a eliminação por pivô no Quadro 1, obtemos o Quadro 3.

Quadro 1

	x_1	x_2	u	h	z	
u	2	1	1	0	0	50
h	1	2	0	1	0	70
	-8	-10	0	0	1	0

Vamos agora repetir o procedimento, usando o Quadro 3 como quadro inicial. Como o elemento mais negativo na linha objetiva do Quadro 3, -3, aparece na primeira coluna, x_1 é a variável de entrada e a primeira coluna é a coluna do pivô.

Quadro 3

	x_1	x_2	u	h	z	
u	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	15
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	35
	-3	0	0	5	1	350

Para determinar a variável de saída, formamos os quocientes dos elementos na última coluna à direita (exceto para a linha objetiva) pelos elementos correspondentes na coluna do pivô que são positivos e selecionamos o menor desses quocientes. Como ambos os elementos na coluna do pivô são positivos, os quocientes são $\frac{15}{\frac{3}{2}}$ e $\frac{35}{\frac{1}{2}}$. O menor desses, $\frac{15}{\frac{3}{2}} = 10$, ocorre na primeira linha, de modo que a variável de saída é u e a linha do pivô é a primeira.

Usando a eliminação por pivô no Quadro 3, obtemos o Quadro 4:

Quadro 4

	x_1	x_2	u	h	z	
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	10
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	30
	0	0	2	4	1	380

Como a linha objetiva no Quadro 4 não tem elementos negativos nas colunas associadas às variáveis, podemos concluir, pelo critério de otimização, que terminamos e que a solução é ótima. Logo, a solução ótima é:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 30, \quad u = 0, \quad h = 0,$$

o valor da função objetiva cresceu de 0 para 350 e para 380, respectivamente.

3.5 O que faz o Método Simplexo

Baseando-nos nas seções acima descritas, podemos sintetizar os passos do método simplexo para compreendê-lo melhor.

O procedimento para utilizar o método simplexo é o seguinte:

Etapa 1: Faça o quadro inicial;

Etapa 2: Aplique o teste de otimização. Se a linha objetiva não tem elementos negativos nas colunas associadas às variáveis , então a solução indicada é ótima; paramos nossos cálculos;

Etapa 3: Escolha uma coluna do pivô determinando a coluna que tem o elemento mais negativo na linha objetiva. Se houver mais de um candidato para a coluna do pivô escolha um;

Etapa 4: Escolha uma linha do pivô. Forme os quocientes dos elementos acima da linha objetiva na última coluna à direita pelos elementos correspondentes na coluna do pivô que são positivos. A linha do pivô é a que corresponde ao menor desses quocientes. Se existe um empate, de modo que o menor quociente acontece em mais de uma linha, escolha qualquer uma delas. Se nenhum dos elementos na coluna do pivô acima da linha objetiva é positivo, o problema não tem solução ótima finita. Paramos nosso cálculos.

Etapa 5: Use o processo de eliminação por pivô para construir um novo quadro e volte para a Etapa 2.

O método simplexo verifica se a presente solução é ótima. Caso seja, o processo está encerrado.

Capítulo 4

Dualidade

Neste capítulo vamos mostrar como associar um problema de minimização a cada problema de programação linear padrão. Considere o seguinte par de problemas de programação linear:

$$\text{Maximize } z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\text{Minimize } z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde A é $m \times n$, $\mathbf{b}$ é $m \times 1$, $\mathbf{c}$ é $n \times 1$, $\mathbf{x}$ é $n \times 1$ e $\mathbf{y}$ é $m \times 1$.

Esses problemas são chamados de *problemas duais*. O problema dado por 4.1 é chamado de *problema original*; o problema dado por 4.2 é chamado de *problema dual*.

Exemplo 4.1 *Dado o problema original*

$$\textit{Maximize } z = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

então o problema dual é

$$Minimize \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Note que, ao formular o problema dual, os coeficientes do $i-$ésimo vínculo do problema original tornam-se os coeficientes da variável y_i nos vínculos do problema dual. Reciprocamente, os coeficientes de x_j no problema original tornam-se os coeficientes do $j-$ésimo vínculo no problema dual. Além disso, os coeficientes da função objetiva do problema original transfornam-se nos elementos do lado direito dos vínculos do problema dual e vice-versa. Como o problema 4.2 pode ser reescrito como um problema padrão de programação linear, podemos perguntar como é o dual do problema dual.

Teorema 4.1 *O dual do problema dual é o problema original.*

Demonstração 4.1 *Dado o problema original*
Maximize

$$z = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} -A^T\boldsymbol{y} &\leq -\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

O problema dual de 4.3 é:

Minimize

$$z' = -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (-A^T)^T\boldsymbol{w} &\geq (-\boldsymbol{b}^T)^T \\ \boldsymbol{w} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ou

Maximize

$$z' = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{w}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{w} &\leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{w} &\geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Fazendo $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$, *vemos que o problema 4.4 é o problema original.*

Teorema 4.2 (Teorema da Dualidade) *Se um dos problemas, original ou dual, tem uma solução ótima onde a função objetiva é finita, então o outro problema também terá uma solução ótima. Além disso, os valores das funções objetivas dos dois problemas são iguais.*

Vamos demonstrar o referido teorema, de forma particular, para problemas de programação linear em duas variáveis.

Demonstração 4.2 *Seja o problema original:*

$$\textit{Maximize} \;\; c_1x_1 + c_2x_2 = z$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Utilizando as variáveis de folga u e h obtemos:

$$\textit{Maximize} \;\; c_1x_1 + c_2x_2 = z$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + h = b_2$$

$$x_1, \quad x_2, \quad u, \quad h \geq 0.$$

Utilizando o método simplexo formamos a seguinte tabela:

	$\downarrow x_1$	x_2	u	h	z	
$\leftarrow u$	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
h	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
	$-c_1$	$-c_2$	0	0	1	0

	x_1	$\downarrow x_2$	u	h	z	
x_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
$\leftarrow h$	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$-a_{21}$	a_{11}	0	$b_2a_{11} - b_1a_{21}$
	0	$c_1a_{12} - c_2a_{11}$	1	0	a_{11}	c_1b_1

Continuando o processo de eliminação por pivô, encontramos a tabela abaixo:

	x_1	x_2	u	h	z	
x_1	1	0	$\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{a_{21}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	0	$\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
x_2	0	1	$\frac{a_{21}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	$\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	0	$\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
	0	0	$\frac{c_1a_{22}-c_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{c_2a_{11}-c_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	1	$\frac{b_1c_1a_{22}+b_2c_2a_{11}-b_1c_2a_{12}-b_2c_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

Resolvido o problema original através do método simplexo, encontramos as seguintes soluções ótimas:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

e temos;

$$z = \frac{b_1 c_1 a_{22} + b_2 c_2 a_{11} - b_2 c_1 a_{21} - b_1 c_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \ \textit{onde} \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0.$$

Tomemos agora o dual do problema original:

$$\textit{Minimize } b_1 y_1 + b_2 y_2 = z'$$

Sujeito a

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \geq c_2$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Podemos observar que o problema dual não é um problema padrão de programação linear. Por isso vamos transformá-lo num problema padrão de programação linear, com as variáveis de folga u e h:

$$\textit{Maximize } - b_1 y_1 - b_2 y_2 = -z'$$

Sujeito a

$$-a_{11} y_1 - a_{21} y_2 + u = -c_1$$

$$-a_{12} y_1 - a_{22} y_2 + h = -c_2$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Multiplicando ambos os lados da função objetiva e das restrições por -1 não iremos alterar as igualdades. Então, passamos a ter:

$$\textit{Maximize } b_1y_1 + b_2y_2 = z'$$

Sujeito a

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - u = c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - h = c_2$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Aplicando o método Simplexo para o problema acima temos :

	$\downarrow y_1$	y_2	u	h	z	
$\leftarrow u$	a_{11}	a_{21}	-1	0	0	c_1
h	a_{12}	a_{22}	0	-1	0	c_2
	$-b_1$	$-b_2$	0	0	1	0

	y_1	$\downarrow y_2$	u	h	z	
y_1	a_{11}	a_{21}	-1	0	0	c_1
$\leftarrow h$	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	a_{12}	$-a_{11}$	0	$c_2a_{11} - c_1a_{12}$
	0	$b_1a_{21} - b_2a_{11}$	$-b_1$	0	a_{11}	c_1b_1

procedendo de forma análoga ao problema original, obtemos a seguinte tabela:

	y_1	y_2	u	h	z	
y_1	1	0	$\frac{a_{22}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	0	$\frac{c_1a_{22}-c_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
y_2	0	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	0	$\frac{c_2a_{11}-c_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
	0	0	$\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{b_1a_{21}-b_2a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	1	$\frac{b_2c_2a_{11}+b_1c_1a_{22}-b_1c_2a_{21}-b_2c_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

Resolvido o problema dual através do método simplexo, encontramos as seguintes soluções ótimas:

$$y_1 = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$y_2 = \frac{c_2a_{11} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$u = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$h = \frac{b_1a_{21} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

E temos que:

$$z' = \frac{b_2c_2a_{11} + b_1c_1a_{22} - b_2c_1a_{21} - b_1c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ onde \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Portanto $z = z'$, como queríamos demonstrar.

Ressaltamos, entretanto, que ao resolvermos o problema dual através do método simplexo, o quadro final irá conter a solução ótima do problema original na linha objetiva e respectivas colunas das variáveis de folga.

Exemplo 4.2 *Tomemos como exemplo o problema dos porcos enunciado no exemplo 2.2 da seção 2.1:*

$$Minimizar \ z = 10x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 20x_1 & + & 50x_2 & \geq & 200 \\ 50x_1 & + & 10x_2 & \geq & 150 \\ 30x_1 & + & 30x_2 & \geq & 210 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Podemos observar que o problema dado não é um problema padrão de programação linear. Desta forma iremos encontrar o seu **dual**, para então aplicar o método simplexo. Logo, o dual é:

Maximize

$$z' = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 20 & 50 & 30 \\ 50 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0.$$

Que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Maximize } z = 200y_1 + 150y_2 + 210y_3$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20y_1 & + & 50y_2 & + & 30y_3 & \leq & 10 \\ 50y_1 & + & 10y_2 & + & 30y_3 & \leq & 5 \end{array}$$

$$y_1, \ y_2, \ y_3 \geq 0$$

Ao aplicarmos o método simplexo e introduzirmos as variáveis de folga u, h temos:

	y_1	y_2	y_3	u	h	z	
u	20	50	30	1	0	0	10
h	50	10	$\boxed{30}$	0	1	0	5
	-200	-150	-210	0	0	1	0

Seguindo os passos enunciados no capítulo anterior temos:

	y_1	y_2	y_3	u	h	z	
u	-30	$\boxed{40}$	0	1	-1	0	5
y_3	50	10	30	0	1	0	5
	150	-80	0	0	7	1	35

Como há valores negativos na linha objetiva, devemos continuar o processo:

	y_1	y_2	y_3	u	h	z	
y_2	-30	40	0	1	-1	0	5
y_3	230	0	120	-1	5	0	15
	90	0	0	2	5	1	45

	y_1	y_2	y_3	u	h	z	
y_2	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{40}$	0	$\frac{1}{8}$
y_3	$\frac{23}{12}$	0	1	$-\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$
	90	0	0	2	5	1	45

A solução ótima do problema dual é:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{8}, \quad y_3 = \frac{1}{8}$$

e o valor de z é 45.

A solução ótima do problema original, encontra-se na linha objetiva nas colunas correspondentes a u e h:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 5.$$

Temos $z = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 45$, como esperávamos pelo Teorema 4.2.

Capítulo 5

Uma Introdução à Teoria de Jogos

Existem muitos problemas em economia, política, guerra, negócios e assim por diante, que necessitam de decisões a serem tomadas em situações de conflito ou competitivas. A teoria dos jogos é uma área relativamente nova da matemática aplicada que tenta analisar situações de conflito e dar uma base racional para a tomada de decisões.

A teoria dos jogos foi desenvolvida na década de 1920 por John von Neumann e E. Borel mas o assunto não rendeu frutos até a publicação, em 1944, do livro *Theory of Games and Economic Behavior*, da autoria de John von Neumann e Oskar Morgenstern.

5.1 Teoria de Jogos

Um **jogo** é uma situação competitiva na qual cada um dentre um determinado número de jogadores tenta atingir seus objetivos em conflito direto com os outros jogadores. Cada jogador faz tudo que pode para ganhar o máximo possível. Essencialmente, os jogos são de dois tipos. Em primeiro lugar, existem os **jogos de azar**, como a roleta, que não requerem nenhuma habilidade da parte dos jogadores; os resultados e vitórias são determinados exclusivamente pelas leis de probabilidade e não são afetados por nenhuma ação dos jogadores. Em segundo lugar, existem os **jogos de estratégia**, como xadrez, damas, bridge e pôquer, que necessitam de habilidade por parte dos jogadores; os resultados e vitórias são determinados pela habilidade dos jogadores. Para nós, um **jogo** vai sempre significar um jogo de estratégia. Além de tais jogos de salão, existem muitos jogos envolvendo competição econômica, guerra, exploração geológica, agricultura, administração de justiça, e assim por diante, nos quais cada jogador pode escolher um conjunto de jogadas possíveis e os resultados dependem da habilidade do jogador . A teoria dos jogos tenta determinar a melhor jogada para cada jogador. A área ainda está em desenvolvimento e serão necessários muitos novos resultados teóricos e aplicados para se analisarem os jogos complexos que ocorrem em situações cotidianas.

5.2 Jogos de Duas Pessoas

Vamos limitar nosso estudo a jogos com dois jogadores, denotados, em geral por L e C. Vamos supor, também, que L tem m jogadas possíveis e que C tem n. Vamos formar uma matriz $m \times n$ marcando suas linhas, com as jogadas possíveis de L e suas colunas com as de C. Cada elemento a_{ij}, na linha i e coluna j, indica a quantidade (de dinheiro ou de algum outro item de valor) recebida por L se L escolhe sua i-ésima jogada e C sua j-ésima. O elemento a_{ij} é chamado um **pagamento** e a matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada **matriz de pagamentos** (para L). Tais jogos são chamados de **jogos de duas pessoas**. Vamos nos referir a eles também como jogos matriciais.

Poderíamos também, se desejássemos, construir uma segunda matriz representando os pagamentos para C. Entretanto, em uma classe de jogos conhecidos como **jogos de somas constantes**, a soma dos pagamentos para L e para C é constante para todos os mn pares de jogadas possíveis de L e de C. Quanto mais L ganha menos C ganha (ou mais C perde) e vice-versa. Um tipo especial de jogo de somas constantes é o **jogo de soma zero**, no qual a quantidade ganha por um jogador é exatamente a quantidade perdida pelo outro jogador. Devido à relação entre as matrizes de pagamentos para C e para L, no caso de um jogo de somas constantes, basta estudar a matriz de pagamentos para L. Neste trabalho estudaremos apenas jogos de somas constantes e a matriz envolvida vai ser a matriz de pagamentos para L.

No estudo de jogos matriciais, sempre se supõe que ambos os jogadores são igualmente capazes, que cada um está jogando o melhor possível e que cada jogador escolhe sua jogada sem saber o que seu oponente vai fazer.

Exemplo 5.1 *Suponha que existem dois fornecedores, as firmas L e C, de um novo tipo especial de pneu que tem* 100 000 *consumidores. Cada companhia pode anunciar seu produto na televisão ou nos jornais. Uma firma de publicidade descobre que, se ambas as firmas anunciarem na televisão, então a firma L vai ficar com* 40 000 *clientes (e a firma C, com 60 000). Se ambos anunciarem nos jornais, cada uma fica com* 50 000 *clientes. Se L anuncia nos jornais e C na televisão, então L fica com* 60 000 *clientes (e C, com* 40 000*). Se L anuncia na televisão e C nos jornais, cada um fica com* 50 000 *clientes.*

Podemos considerar essa situação como um jogo entre L e C, com a matriz de pagamentos dada abaixo. Os elementos da matriz indicam o número de clientes que ficam com a firma L. Esse é um jogo de somas constantes, já que a soma dos clientes de L com os de C é sempre igual à população total dos 100 000 *compradores desse tipo de pneu.*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \textit{Empresa C} \\
 & & \begin{array}{cc} \textit{TV} & \textit{Jornais} \end{array} \\
\textit{Empresa L} & \begin{array}{c} \textit{TV} \\ \textit{Jornais} \end{array} & \begin{bmatrix} 40\ 000 & 50\ 000 \\ 60\ 000 & 50\ 000 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Exemplo 5.2 *Vamos considerar o seguinte jogo, comum em parque de diversões. Nós chamaremos os participantes do jogo de* jogador L *e* jogador C. *Cada jogador tem uma roda estacionária com um ponteiro móvel fixado em seu centro, como mostra a Figura 5.2. Por razões que ficarão claras, nós vamos chamar a roda do jogador L de* roda das linhas *e a roda do jogador C de* roda das colunas. *A roda das linhas é dividida em três setores numerados* 1, 2 *e* 3 *e a roda das colunas é dividida em quatro setores, numerados* 1, 2, 3 *e* 4. *As frações de área ocupadas pelos diversos setores são* *indicadas na figura. Para dar seu lance, o jogador gira o ponteiro de sua roda, pondo-o em movimento até parar aleatoriamente. O número do setor no qual a roda pára é chamado o* movimento *do jogador. Assim, o jogador L tem três movimentos possíveis e o jogador C tem quatro movimentos possíveis. Dependendo do movimento feito por cada jogador, o jogador C faz um pagamento em dinheiro (em unidades monetárias) ao jogador L de acordo com a Tabela 5.1.*

Por exemplo, se o ponteiro da roda das linhas pára no setor 1 (o jogador L fez o movimento 1*) , e o ponteiro da roda das colunas pára no setor* 2 *(o jogador C fez o movimento* 2*), então o jogador C deve pagar* \$5 *ao jogador L. Algumas das entradas nesta tabela são negativas, indicando que o jogador L paga para o jogador C. Com isto queremos dizer que o jogador L faz um pagamento positivo ao jogador C. Por exemplo, se a roda das linhas mostra* 2 *e a roda das colunas mostra* 4*, então o jogador L paga ao jogador C a quantia de* \$4*, pois a entrada correspondente na tabela é*$-$ \$4*. Desta maneira, as entradas positivas na tabela correspondem aos ganhos do jogador L e as perdas do jogador C enquanto as entradas negativas na tabela representam as perdas do jogador L e os ganhos do jogador C .*

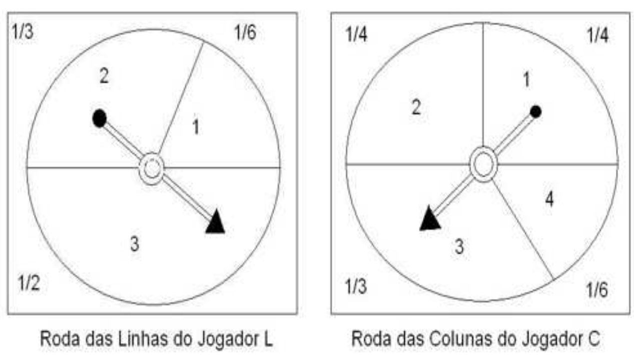

Figura 5.1:

Neste jogo, os jogadores não têm controle sobre seus movimentos; cada movimento é determinado pela sorte. Contudo, se cada jogador puder decidir se ele quer ou não jogar, então cada um quererá saber quanto pode esperar ganhar ou perder a longo prazo, caso decida jogar.

		Movimento do jogador C			
		1	2	3	4
Movimento do jogador L	1	\$3	\$5	−\$2	−\$1
	2	−\$2	\$4	−\$3	−\$4
	3	\$6	−\$5	\$0	\$3

Tabela 5.1:

5.3 Jogos de Matriz de Duas Pessoas com Soma Zero

O jogo descrito acima é um exemplo de um **jogo de matriz de duas pessoas com soma zero**. O termo "soma zero" significa que a cada vez que é jogado, o ganho positivo de um jogador é igual a perda do outro jogador. Ou seja, a soma dos dois ganhos é zero. O termo "jogo de matriz" é utilizado para descrever um jogo de duas pessoas no qual cada jogador tem somente um número finito de movimentos, de modo que todos os possíveis resultados de cada jogada, e os correspondentes ganhos dos jogadores, podem ser arranjados em formato tabular ou matricial, como na tabela 5.1.

Em um jogo qualquer deste tipo, seja m o número de movimentos possíveis do jogador L e seja n o número de possíveis movimentos do jogador C. Num lance deste jogo, cada jogador faz um de seus movimentos possíveis e então é feita uma *compensação* do jogador C para o jogador L, dependendo dos movimentos.

Para $i = 1, 2, \ldots m$ e $j = 1, 2, \ldots n$, vamos escrever a matriz de pagamentos

$$\begin{aligned} a_{ij} = {} & \text{compensação do jogador } C \text{ para o jogador } L, \\ & \text{se o jogador } L \text{ faz o movimento } i \\ & \text{e o jogador } C \text{ faz o movimento } j \end{aligned}$$

Esta compensação não precisa ser em dinheiro, ela pode ser qualquer espécie de bem consumível, ao qual podemos associar um valor numérico. Como antes, se uma entrada a_{ij} é negativa, isto significa que o jogador C recebe do jogador L uma compensação de $|a_{ij}|$. Nós arranjamos estas mn compensações possíveis no formato de uma matriz

$A_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

à qual nos referimos como **matriz de compensação** ou **matriz de pagamento** do jogo.

Exemplo 5.3 *Considere o jogo de cara ou coroa, consistindo em dois jogadores, L e C, cada um dos quais tem uma moeda em sua mão. Cada jogador mostra um lado de sua moeda sem saber a escolha do seu oponente. Se ambos os jogadores estão mostrando o mesmo lado da moeda, L ganha R\$ 1,00 de C; caso contrário, C ganha R\$ 1,00 de L.*

Nesse jogo de duas pessoas e soma zero, cada jogador tem duas jogadas possíveis, podendo mostrar cara (C) ou coroa (K). A matriz de pagamentos, então é:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jogador } C \\ & & \begin{array}{cc} C & K \end{array} \\ \text{Jogador } L & \begin{array}{c} C \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

5.4 Ponto de Sela

Considere agora um jogo de duas pessoas e somas constantes com a matriz de pagamentos $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, de modo que o jogador L tem m jogadas possíveis e o jogador C tem n. Se o jogador L escolhe a i-ésima jogada, ele tem certeza que vai ganhar pelo menos o menor elemento na i-ésima linha de A, independente do que C fizer. Logo, a melhor jogada para L é aquela que maximiza seus pagamentos certos apesar da melhor jogada possível de C. O jogador L vai ganhar a maior quantia maximizando seu menor pagamento. Os objetivos do jogador C estão em conflito direto com os de L, ele está tentando manter os pagamentos de L no mínimo possível.

Se C escolhe sua j-ésima jogada, ele sabe que não vai perder mais do que o maior elemento na coluna j de A, independente da jogada de L. Logo, a melhor jogada para C é aquela que minimiza suas perdas certas apesar da melhor jogada possível de L. O melhor para o jogador C é minimizar sua maior perda.

Definição 5.1

(i) *Se a matriz de pagamentos de um jogo matricial contém um elemento a_{rs} que é, ao mesmo tempo, o mínimo da linha **r** e o máximo da coluna **s**, então a_{rs} é chamado de **ponto de sela**. Além disso, a_{rs} é chamado **valor do jogo**. Se o valor de um jogo de soma zero é zero, o jogo é dito **imparcial***

(ii) *Um jogo matricial é dito **estritamente determinado** se sua matriz de pagamentos tem um ponto de sela.*

Se a_{rs} é um ponto de sela para um jogo matricial, então o jogador L tem certeza de ganhar pelo menos a_{rs} quando escolher sua r-ésima jogada e o jogador C tem a garantia de que não vai perder mais do que a_{rs} quando escolher sua s-ésima jogada. Isso é o melhor que cada jogador pode fazer.

Exemplo 5.4 *Considere um jogo com matriz de pagamentos*

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Para determinar se esse jogo tem um ponto de sela, escrevemos o mínimo de cada linha à direita dela e o máximo de cada coluna abaixo dela. Temos então,

$$\begin{array}{rcc}
 & & \textbf{\textit{Mínimos das linhas}} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & \boxed{2} & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \\
\textbf{\textit{Máximos das colunas}} & \begin{matrix} 3 & 4 & 2 & 6 \end{matrix} &
\end{array}$$

O elemento destacado $a_{23} = 2$ é, ao mesmo tempo, o menor elemento na segunda linha e o maior na terceira coluna. Logo, ele é um ponto de sela para o jogo, que é, então, estritamente determinado. O valor do jogo é 2 e o jogador L leva vantagem. A melhor jogada para L é escolher sua segunda linha; ele vai ganhar pelo menos 2 unidades de C, independente do que C jogar. A melhor jogada para C é a sua terceira coluna; ele vai limitar sua perda a não mais do que 2 unidades, independente do que L fizer.

Exemplo 5.5 *Estratégias Ótimas para Maximizar uma Audiência.*

Duas redes de televisão competidoras, L e C, estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração para o mesmo horário. A rede L pode utilizar um de três programas possíveis e a rede C pode utilizar um de quatro programas possíveis. Nenhuma das redes sabe qual programa a outra vai levar ao ar. Ambas as redes contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as diversas possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência. O instituto dá às redes a Tabela 5.2, cuja (i, j)-ésima entrada é a percentagem da audiência que vai assistir a rede L se o programa i da rede L competir, em termos de audiência, com o programa j da rede C. Qual programa cada rede deveria levar ao ar para maximizar a audiência?

Considerando a matriz de compensação do jogo de duas pessoas com soma constante para as duas redes de televisão, temos a seguinte matriz de pagamentos:

$$\begin{bmatrix} 60 & 20 & 30 & 55 \\ 50 & 75 & 45 & 60 \\ 70 & 45 & 35 & 30 \end{bmatrix}$$

	Programa da Rede C				
		1	2	3	4
Programa da Rede L	1	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

Tabela 5.2:

em que a (i, j)-ésima entrada da matriz é a percentagem da audiência que a rede C perde para a rede L se os programas i da rede L e j da rede C competirem entre si. É fácil ver que a entrada

$$a_{23} = 45$$

é um ponto de sela da matriz de compensação. Portanto, a melhor estratégia para a rede L é levar ao ar o **programa 2** *e a melhor estratégia para a rede C é levar ao ar o* **programa 3**. *Isto vai resultar em 45% da audiência para a rede L e 55% da audiência para a rede C.*

Exemplo 5.6 *Considere o jogo com matriz de pagamentos*

$$\begin{array}{rc l}
 & & \textbf{\textit{Mínimos das linhas}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} & \begin{array}{r} -1 \\ -2 \\ -3 \end{array} \\
\textbf{\textit{Máximos das colunas}} & \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 4 \end{array} &
\end{array}$$

É claro que essa matriz não tem ponto de sela, pois não há um elemento que seja ao mesmo tempo o mínimo das linhas e o máximo das colunas.

Por outro lado, um jogo pode ter mais de um ponto de sela.

Exemplo 5.7 *Considere o jogo com matriz de pagamentos*

$$\begin{array}{rcc}
 & & \textbf{\textit{Mínimos das linhas}} \\
 & \begin{bmatrix} 5 & \boxed{4} & 5 & \boxed{4} \\ 6 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & \boxed{4} & 6 & \boxed{4} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{matrix} \\
\textbf{\textit{Máximos das colunas}} & \begin{matrix} 6 & 4 & 6 & 4 \end{matrix} &
\end{array}$$

Os elementos a_{12}, a_{14}, a_{32} e a_{34} são pontos de sela e têm o mesmo valor, 4. Eles aparecem destacados na matriz de pagamentos. O valor do jogo também é 4.

5.4.1 Unicidade do Ponto de Sela

Seja v_1 o máximo dos mínimos das linhas e v_2 o mínimo dos máximos das colunas, então:

Teorema 5.1 $v_1 \leq v_2$

Demonstração 5.1 *Pela definição de r e s o máximo dos mínimos das linhas ocorre na linha r e o mínimo dos máximos das colunas ocorre na coluna s. Visto que a_{rs} está na linha r e na coluna s, então temos que $a_{rj} \leq a_{rs}$ e $a_{rs} \leq a_{is}$. Portanto $v_1 \leq a_{rs} \leq v_2$, ou seja, $v_1 \leq v_2$*

Colorolário 5.1 *Se $v_1 = v_2$ então, $a_{rj} = a_{rs} = a_{is}$ e a entrada a_{rs} é ao mesmo tempo o mínimo da linha r e o máximo da coluna s.*

Então $v_1 = v_2$ implica que a entrada a_{rs} é o mínimo das linhas e o máximo das colunas. Então o par de estratégias (p, q) está em equilíbrio e com isto os jogadores podem maximizar o seu ganho. Então nesse caso nós dizemos que as estratégias p e q são uma solução para o jogo e que o valor do jogo é um valor comum para ambos os jogadores, ou seja, $v_1 = v_2$.

Teorema 5.2 *$v_1 = v_2$ se e somente se a matriz de pagamentos possui um ponto de sela.*

Demonstração 5.2 *Do corolário anterior $v_1 = v_2$ implica a existência de um ponto de sela. Suponha agora que a matriz A tem um ponto de sela a_{rs}. Uma vez que a_{rs} é o máximo da coluna, todas as outras entradas da $s-$ésima coluna devem ser menores ou iguais do que a_{rs} então os valores mínimos de todas as outras linhas devem ser menores ou iguais a a_{rs}, visto que a $s-$ésima entrada em cada linha tem essa propriedade. Mas a_{rs} é também o mínimo da linha r, a_{rs} é igual ao máximo dos mínimos das linhas, isto é a_{rs} igual a v_1. Similarmente a_{rs} é igual a v_2, então $v_1 = v_2$.*

Teorema 5.3 (Unicidade do Ponto de Sela) *Se uma matriz de pagamentos possui mais de um ponto de sela, então ele é único.*

Demonstração 5.3 *Considere a matriz de pagamentos abaixo:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C_m & C_n \end{array} \\ \begin{array}{c} L_i \\ L_j \end{array} & \begin{bmatrix} a_{im} & a_{in} \\ a_{jm} & a_{jn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Seja a_{im} e a_{jn} pontos de sela. Suponha por absurdo que $a_{im} \neq a_{jn}$.

Como a_{im} é ponto de sela, então, o mínimo da i-ésima linha é o elemento a_{im}, portanto $a_{im} < a_{in}$. Temos também que a_{jn} é ponto de sela, portanto ele é o máximo da n-ésima coluna, assim $a_{in} < a_{jn}$.

Logo temos :

$$a_{im} < a_{in} < a_{jn} \Rightarrow a_{im} < a_{jn}. \tag{5.2}$$

Como a_{im} é ponto de sela então ele é o máximo da m-ésima coluna, portanto; $a_{im} > a_{jm}$. Temos ainda que a_{jn} é ponto de sela, portanto ele é o mínimo da j-ésima linha, assim $a_{jm} > a_{jn}$. Portanto:

$$a_{im} > a_{jm} > a_{jn} \Rightarrow a_{im} > a_{jn} \tag{5.3}$$

De 5.2 e 5.3 encontramos uma contradição. Assim $a_{im} = a_{jn}$.

Até aqui nós estivemos discutindo a situação em que cada jogador tem uma estratégia pré-determinada. Agora nós iremos discutir a situação mais difícil em que ambos jogadores podem mudar suas estratégias independentemente.

Considere agora o jogo de cara ou coroa do Exemplo 5.3 com matriz de pagamentos:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jogador C} \\ & & \begin{array}{cc} C & K \end{array} \\ \text{Jogador L} & \begin{array}{c} C \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

É claro que este jogo não é estritamente determinado; de fato, ele não tem ponto de sela. Para analisar esse tipo de situação, vamos supor que um jogo é jogado repetidamente e que cada jogador tenta determinar sua melhor jogada. Então, o jogador L tenta maximizar suas vitórias, enquanto que o jogador C tenta minimizar suas perdas. Uma **estratégia** para um jogador é uma decisão para a escolha da jogada.

Suponha que, ao jogar repetidamente, o jogador L sempre escolhe a primeira linha (ele sempre mostra cara), na esperança de que o jogador C escolha sempre a primeira coluna (mostre cara), garantindo, assim, seu ganho de $R\$ \ 1,00$. Por outro lado, quando o jogador C começa a notar que L sempre escolhe a primeira linha, ele escolhe a segunda coluna, resultando em uma perda de $R\$ \ 1,00$ para L. Analogamente, se L sempre escolher a segunda linha, C vai escolher a primeira linha, resultando em uma perda de $R\$ \ 1,00$ para L. Podemos concluir, então, que cada jogador tem que, de alguma forma, impedir o outro jogador de descobrir qual vai ser sua jogada. Essa situação é a oposta do que acontece em jogos estritamente determinados. Em um jogo **estritamente determinado**, cada jogador escolhe a mesma jogada, independente de saber ou não qual vai ser a jogada de seu oponente. Portanto, em um jogo estritamente determinado, cada jogador vai escolher cada jogada com uma determinada freqüência relativa.

Isto muda qualitativamente a natureza do problema e nos coloca firmemente na verdadeira *Teoria de Jogos.* Fica entendido que nenhum dos dois jogadores conhece a estratégia que o outro irá escolher. Também supomos que cada jogador vai fazer a melhor escolha possível de estratégia e que o outro jogador sabe disto.

5.5 Introdução a Probabilidade

Suponha que cada jogador faça sua jogada independentemente um do outro, ou seja, os eventos são aleatórios e independentes. Por exemplo, se forem lançadas duas moedas, os resultados serão em geral independentes, a não ser que uma esteja colada na outra. Similarmente, suponha que um dos jogadores tire uma carta ao acaso de um baralho e reponha a mesma no baralho, e então o outro jogador tire uma carta também ao acaso do mesmo baralho. Temos que esses dois eventos são independentes. Porém se o primeiro jogador não tivesse reposto a carta, a escolha do segundo jogador seria afetada pela escolha do primeiro jogador e os eventos não seriam independentes.

Então, a probabilidade de eventos independentes pode ser relacionada da seguinte maneira:

Definição 5.2 *Se dois eventos A e B são independentes, então, a probabilidade de $(A$ e $B)$ acontecerem é igual a (probabilidade de $A) \times ($ probabilidade de $B)$.*

Exemplo 5.8 *Se jogarmos duas moedas ao acaso a probabilidade de dar cara em ambas as moedas é :*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Semelhantemente se lançarmos um dado e uma moeda, a probabilidade de obtermos coroa e um 3 é:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

5.6 Estratégias para Jogos Matriciais

Considere agora um jogo matricial com matriz de pagamentos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Suponha que

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \text{ e } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

são estratégias para L e C, respectivamente. Então, se L escolhe a primeira linha com probabilidade p_1 e C escolhe a primeira coluna com probabilidade q_1, o ganho esperado de L é $p_1 \cdot q_1 \cdot a_{11}$. Analogamente, podemos examinar as três possibilidades restantes, obtendo a Tabela abaixo. O ganho esperado $E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ de L no jogo é, então, a soma das quatro quantidades na coluna da extrema direita. Obtemos:

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = p_1q_1a_{11} + p_1q_2a_{12} + p_2q_1a_{21} + p_2q_2a_{22} \tag{5.5}$$

a equação 5.5 é uma média ponderada do ganho esperado para o jogador L, cada compensação é ponderada de acordo com a probabilidade de sua ocorrência. Na teoria de probabilidades, esta média ponderada é chamada de ganho esperado para o jogador L. Sendo que 5.5 pode ser escrito em forma matricial como:

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\,A\,\mathbf{q} \tag{5.6}$$

Jogador L	Jogador C	Probabilidade	Ganho de L	Ganho esperado de L
Linha 1	Coluna 1	p_1q_1	a_{11}	$p_1q_1a_{11}$
Linha 1	Coluna 2	p_1q_2	a_{12}	$p_1q_2a_{12}$
Linha 2	Coluna 1	p_2q_1	a_{21}	$p_2q_1a_{21}$
Linha 2	Coluna 2	p_2q_2	a_{22}	$p_2q_2a_{22}$

Generalizando para um jogo matricial com matriz de pagamentos $A_{m\times n}$. Temos que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

são estratégias para L e C, repectivamente, com

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1) \text{ e } (q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1).$$

Onde a matriz de pagamentos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

estabelece os pagamentos de L. O ganho do jogador L é dado por

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}A\mathbf{q} \qquad (5.7)$$

Como $E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ é a compensação esperada para o jogador L, segue que $-E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ é a compensação esperada para o jogador C.

Exemplo 5.9 (Pedra-Papel-Tesoura) *Os jogadores L e C mostram as mãos de três formas possíveis: uma mão fechada indica pedra, uma mão aberta indica papel e o dedo indicador e o dedo médio extendidos indicam tesoura. O jogador que mostrar pedra só ganha se o outro jogador mostrar tesoura, pois a pedra quebra a tesoura, o jogador que mostrar papel só ganha se o outro jogador mostrar pedra, pois o papel embrulha a pedra e o jogador que mostrar tesoura somente ganhará se o outro jogador mostrar papel, pois a tesoura corta o papel. Se ambos mostrarem papel-papel, tesoura-tesoura ou pedra-pedra, então, teremos um empate e ambos não ganham nem perdem.*

Podemos representar o jogo para o jogador L da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} & \text{Jogador C} \\ & \begin{array}{ccc} Pedra & Papel & Tesoura \end{array} \\ \text{Jogador L} \begin{array}{c} Pedra \\ Papel \\ Tesoura \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são estratégias para L e C, respectivamente, então o ganho esperado de L é:

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}A\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Isso significa que o jogador L perde $\frac{1}{3}$ para o jogador C a cada rodada.

Exemplo 5.10 *Considere o jogo matricial com matriz de pagamentos*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

são estratégias para L e C, respectivamente, então o ganho esperado de L é

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}A\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Se

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

são estratégias para L e C, respectivamente, então o ganho esperado de L é $-\frac{1}{6}$. Então, no primeiro caso L ganha $\frac{1}{2}$ de C, enquanto que no segundo caso L perde $\frac{1}{6}$ para C.

Exemplo 5.11 *Para o jogo do parque de diversões do exemplo 5.2, nós temos*

$$E(p,q) = pAq = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{13}{72} = 0,1805\ldots$$

Assim, a longo termo, o jogador L pode esperar receber uma média de 18 centavos do jogador C a cada jogada do jogo.

5.6.1 Estratégias Puras e Estratégias Mistas

Definição 5.3 *Suponha que temos um jogo matricial com uma matriz de pagamentos A $m \times n$. Seja p_i, $1 \leq i \leq m$, a probabilidade de que L vai escolher a i-ésima linha de A (isto é, sua i-ésima jogada possível). Seja q_j, $1 \leq j \leq n$, a probabilidade de que C vai escolher a j-ésima coluna de A. O vetor $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{bmatrix}$ é chamado uma* ***estratégia*** *para o jogador L; o vetor:*

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

é chamado uma ***estratégia*** *para o jogador C.*

É claro que as probabilidades p_i e q_j na definição acima satisfazem

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

Se o jogo matricial é estritamente determinado, então as estratégias ótimas para L e para C têm uma das componentes igual a 1 e todas as outras iguais a zero. Tais estratégias são chamadas **estratégias puras**. Uma estratégia que não é pura é chamada uma **estratégia mista**.

Exemplo 5.12 *Dada a matriz*

$$\begin{array}{rcc} & & \textit{\textbf{Mínimos das linhas}} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -5 \\ 5 & \boxed{2} & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ -6 \\ 2 \end{array} \\ \textit{\textbf{Máximos das colunas}} & \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

verificamos que é um jogo matricial estritamente determinado com ponto de sela igual a 2, logo a estratégia pura para L terá uma das componentes igual a 1, que corresponde a posição da linha em que se encontra o ponto de sela e todas as outras componentes iguais a zero. Já a estratégia pura para C terá uma das componentes igual a 1, que corresponde a posição da coluna em que se encontra o ponto de sela e todas as outras componentes iguais a zero. Então a estratégia pura para L é:

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e a estratégia pura para C é:

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.13 *Considere o jogo com matriz de pagamentos*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o máximo dos mínimos das linhas é $v = 1$, logo o jogador L pode garantir que seu ganho não caia abaixo de 1 *unidade jogando sempre a estratégia pura*

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere, entretanto que o jogador L jogue a estratégia mista

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se o jogador C responder com a estratégia pura

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o ganho esperado para L é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{2}) & 3(\frac{1}{2}) + 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2},$$

e se o jogador C responder com a estratégia

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

o ganho esperado para L é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Suponha agora que o jogador C use a estratégia

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

então, o ganho esperado para L será

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{5}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2 \\ &\geq \frac{3}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2 \\ &= \frac{3}{2}(q_1 + q_2), \ \textit{mas como } q_1 + q_2 = 1 \textit{ temos} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Então, ao usar a estratégia $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ o jogador L pode garantir para ele um ganho esperado de $\frac{3}{2}$ porque, não importa que estratégia o jogador C escolha ter-se-á

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \geq \frac{3}{2}.$$

Isto não significa dizer que $\frac{3}{2}$ é o ganho mínimo para o jogador L, mas significa que ao escolher a estratégia mista $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ o jogador L poderá ganhar uma quantia mínima de $\frac{3}{2}$ por jogada. Então ao usar esta estratégia, o jogador L tem um aumento em seu ganho de 1 para $\frac{3}{2}$. Surge então a seguinte pergunta: Poderá o jogador L melhorar seu ganho? Caso o jogador L escolha a estratégia $p = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, não importando qual estratégia o jogador C escolha temos que o seu ganho será

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{10}{3} q_1 + 2q_2 \\
&\geq 2q_1 + 2q_2 \\
&= 2(q_1 + q_2), \text{ mas como } q_1 + q_2 = 1 \text{ temos} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Portanto o ganho é maior que $\frac{3}{2}$.

Este exemplo sugere que cada jogador tenha a sua disposição um conjunto infinito de estratégias mistas.

Capítulo 6

Estratégias Ótimas

Uma estratégia para o jogador L é dita ótima se ela garante o maior ganho possível para L, independente da jogada de seu oponente. Analogamente, uma estratégia para o jogador C é dita ótima se ela garante o menor ganho possível para L, independente do que L possa fazer, ou seja, C tenta minimizar suas perdas.

Se $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são estratégias ótimas para L e C, respectivamente, então o ganho esperado de L, $v = E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, é chamado o valor do jogo. Embora $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ seja, de fato, uma matriz 1×1, podemos considerá-lo, simplesmente, como sendo um número v. O problema principal da teoria de jogos é determinar estratégias ótimas para cada jogador.

Considere novamente um jogo matricial com a matriz de pagamentos 2×2 em 5.4 e suponha que o jogo não é estritamente determinado, ou seja, não possui ponto de sela. Para determinar uma estratégia ótima para L, procedemos da seguinte maneira. Suponha que a estratégia para L é $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$. Então, se C escolhe a primeira coluna, $q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, o ganho esperado de L é:

$$pAq = a_{11}p_1 + a_{21}p_2. \tag{6.1}$$

Se C escolhe a segunda coluna, $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, o ganho esperado de L é:

$$pAq = a_{12}p_1 + a_{22}p_2. \tag{6.2}$$

Se v é o mínimo dos ganhos esperados em 6.1 e 6.2, então L espera ganhar pelo menos v unidades de C, independente do que C jogar. Temos, então,

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \geq v \tag{6.3}$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \geq v. \tag{6.4}$$

Além disso, o jogador L tenta tornar v o maior possível. Portanto, o jogador L tenta encontrar p_1, p_2 e v tais que:

$$v \text{ é máximo}$$

e

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 - v \geq 0$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 - v \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{6.5}$$

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ v \geq 0.$$

Podemos observar que o problema 6.5 é um problema de programação linear.

Vamos agora encontrar uma estratégia ótima para o jogador C. Suponha que uma estratégia para C é

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Se L escolhe a primeira linha, $p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, o ganho esperado de L é

$$pAq = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \tag{6.6}$$

enquanto que, se L escolhe a segunda linha, $p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, seu ganho esperado é

$$pAq = a_{21}q_1 + a_{22}q_2. \tag{6.7}$$

Se v' é o máximo dos ganhos esperados em 6.6 e 6.7, então

$$a_{11}q_1 + a_{21}q_2 \leq v'$$

$$a_{12}q_1 + a_{22}q_2 \leq v'$$

Como o jogador C quer perder o mínimo possível, ele tenta tornar v' o menor possível. Logo, C quer encontrar q_1, q_2 e v' tais que

$$v' \text{é mínimo}$$

e

$$a_{11}q_1 + a_{21}q_2 - v' \leq 0$$

$$a_{12}q_1 + a_{22}q_2 - v' \leq 0$$

$$q_1 + q_2 = 1 \tag{6.8}$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, v' \geq 0.$$

O problema 6.8 também é um problema de programação linear.

Sejam p^* e q^* estratégias ótimas para os jogadores L e C respectivamente temos:

Teorema 6.1 (Teorema Fundamental para Jogos Matriciais.)

Todo jogo matricial tem solução, isto é, existem estratégias ótimas para L e para C. Além disso, $v = v'$. Se o jogo matricial for estritamente determinado, ou seja, possui ponto de sela, a estratégia ótima para o Jogador L terá uma das componentes igual a 1, que corresponde a posição da linha em que se encontra o ponto de sela e todas as outras componentes iguais a zero.

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Já a estratégia pura para o Jogador C terá uma das componentes igual a 1, que corresponde a posição da coluna em que se encontra o ponto de sela e todas as outras componentes iguais a zero.

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E o valor do jogo será o ponto de sela.

Porém em um jogo 2×2 que não é estritamente determinado, temos que:

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

são estratégias ótimas para os jogadores L e C, respectivamente. O valor do jogo é

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \text{ onde } \quad a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0.$$

Demonstração 6.1 *Seja um jogo com matriz de pagamentos $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Então, se somarmos uma constante r a todos os elementos de A, as estratégias ótimas para o jogador L e para o jogador C não mudam, e o valor do jogo é r mais o valor do jogo antigo. De fato,*

seja a matriz de pagamentos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ao somarmos uma constante $r \geq 0$, a cada elemento da matriz acima obtemos a nova matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + r & a_{12} + r \\ a_{21} + r & a_{22} + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} = A + R$$

O valor do jogo será dado por

$$E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \boldsymbol{p}^* B \boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{p}^*(A + R)\boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{p}^* A + \boldsymbol{p}^* R)\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{p}^* A \boldsymbol{q}^* + \boldsymbol{p}^* R \boldsymbol{q}^*$$

onde $\boldsymbol{p}^* A \boldsymbol{q}^* = v$ *e*

$$\boldsymbol{p}^* R \boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 r + p_2 r & p_1 r + p_2 r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = p_1 r q_1 + p_2 r q_1 + p_1 r q_2 + p_2 r q_2$$

pondo r *em evidência obtemos:*

$$\boldsymbol{p}^* R \boldsymbol{q}^* = r(p_1 q_1 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_2) = r[p_1(q_1 + q_2) + p_2(q_1 + q_2)]$$

Como $p_1 + p_2 = 1$ *e* $q_1 + q_2 = 1$ *temos:*

$$\boldsymbol{p}^* R \boldsymbol{q}^* = r$$

Logo, $E(p^*, q^*) = v + r$.

Suponha que uma estratégia ótima para L *é*

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}.$$

Então, o ganho esperado de L *é:*

$$v \text{ é máximo}$$

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 - v \geq 0$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 - v \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

então se dividirmos cada vínculo por v *e definirmos*

$$y_i = \frac{p_i}{v}$$

observe que

$$y_1 + y_2 = \frac{p_1}{v} + \frac{p_2}{v} = \frac{(p_1 + p_2)}{v} = \frac{1}{v}$$

Logo v *é máximo se e somente se* $y_1 + y_2$ *é mínimo. Consideremos agora o problema original com a seguinte matriz de pagamentos*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ e \ \boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$$

continuando a demonstração, queremos encontrar v*, sujeito a*

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \geq v$$

dividindo por v *temos*

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq 1$$

analogamente

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \geq v$$

dividindo por v *teremos*

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq 1$$

Introduzindo as variáveis de folga u *e* h*, o problema transforma-se em:*

$$Maximize \ v$$

sujeito a

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - u = 1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - h = 1$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ u \geq 0, \ h \geq 0.$$

O problema para o jogador L, dado acima pode ser reescrito sob a forma

$$Minimize \ y_1 + y_2 = z$$

sujeito a

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - u = 1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - h = 1$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Aplicando o método Simplexo para o problema acima temos :

	$\downarrow y_1$	y_2	u	h	z	
$\leftarrow u$	a_{11}	a_{21}	-1	0	0	1
h	a_{12}	a_{22}	0	-1	0	1
	-1	-1	0	0	1	0

	y_1	$\downarrow y_2$	u	h	z	
y_1	a_{11}	a_{21}	-1	0	0	1
$\leftarrow h$	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	a_{12}	$-a_{11}$	0	$a_{11} - a_{12}$
	0	$a_{21} - a_{11}$	-1	0	a_{11}	1

	y_1	y_2	u	h	z	
y_1	$-a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$	0	$a_{11}a_{22}$	$-a_{11}a_{21}$	0	$(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{22})$
y_2	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	a_{12}	$-a_{11}$	0	$a_{11} - a_{12}$
	0	0	$a_{11}a_{12} - a_{11}a_{22}$	$a_{11}(a_{21} - a_{11})$	$a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$	$a_{11}(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$

Dividindo:

(i) *a primeira linha por* $-a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

(ii) *a segunda linha por* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(iii) *a terceira linha por* $a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

Obtemos a seguinte tabela

	y_1	y_2	u	h	z	
y_1	1	0	$\frac{a_{22}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	0	$\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
y_2	0	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$	0	$\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
	0	0	$\frac{a_{12}-a_{22}}{a_{11}a_{12}-a_{11}a_{22}}$	$\frac{a_{21}-a_{11}}{a_{11}a_{12}-a_{11}a_{22}}$	1	$\frac{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

temos então que:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$z = \frac{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

mas

$$z = y_1 + y_2 = \frac{1}{v}$$

$$v = \frac{1}{z} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{6.9}$$

e

$$p_1 = y_1 \cdot v = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{6.10}$$

e

$$p_2 = y_2 \cdot v = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{6.11}$$

Portanto uma estratégia ótima para L é:

$$\boldsymbol{p}^* = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{array} \right] \tag{6.12}$$

O dual do problema dado acima é

$$minimizar\ v'$$

com as seguintes restrições:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 - v' \leq 0$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 - v' \leq 0$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0 \quad e\ v' \geq 0.$$

Iremos transformar este problema num problema padrão de programação linear.

Como $v' \geq 0$, dividindo cada vínculo por v' temos:

$$\frac{a_{11}q_1}{v'} + \frac{a_{12}q_2}{v'} - 1 \leq 0$$
$$\frac{a_{21}q_1}{v'} + \frac{a_{22}q_2}{v'} - 1 \leq 0$$
$$\frac{q_1}{v'} + \frac{q_2}{v'} = \frac{1}{v'}$$

então definimos $x_i = \dfrac{q_i}{v'}$ de modo que v' é mínimo se e somente se $x_1 + x_2$ é máximo.

Então o problema acima pode ser colocado na seguinte forma:

$$\text{maximize} \;\; x_1 + x_2 = z$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq 1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Utilizando o método simplexo e as variáveis de folga u e h formamos a seguinte tabela

	$\downarrow x_1$	x_2	u	h	z	
$\leftarrow u$	a_{11}	a_{12}	1	0	*0*	*1*
v	a_{21}	a_{22}	*0*	1	*0*	*1*
	-1	-1	*0*	*0*	*1*	*0*

	x_1	$\downarrow x_2$	u	h	z	
x_1	a_{11}	a_{12}	1	0	*0*	*1*
$\leftarrow h$	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$-a_{21}$	a_{11}	*0*	$a_{11} - a_{21}$
	0	$a_{12} - a_{11}$	*1*	*0*	a_{11}	*1*

	x_1	x_2	u	h	z	
x_1	$a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$	*0*	$a_{11}a_{22}$	$-a_{11}a_{12}$	*0*	$(a_{11}a_{22} - a_{11}a_{12})$
x_2	0	$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$-a_{21}$	a_{11}	*0*	$a_{11} - a_{21}$
	0	*0*	$a_{11}a_{22} - a_{11}a_{21}$	$a_{11}(a_{11} - a_{12})$	$a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$	$a_{11}(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$

Dividindo:

(i) *a primeira linha por* $a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

(ii) *a segunda linha por* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(iii) *a terceira linha por* $a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

Obtemos a seguinte tabela

	x_1	x_2	u	h	z	
x_1	1	0	$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{22}}$	$\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	0	$\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
x_2	0	1	$\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	$\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$	0	$\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
	0	0	$\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}a_{12}-a_{11}a_{22}}$	$\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}a_{12}-a_{11}a_{22}}$	1	$\frac{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

$$x_1 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{11}a_{12}}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$z = \frac{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Como sabemos que $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{v}$ *e* $x_1 + x_2 = z$.

Como $v' = \dfrac{1}{z}$, *então*

$$v' = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{6.13}$$

Como $q_1 = x_1 v'$;

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

logo

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{6.14}$$

e de $q_2 = x_2 v'$ *temos*

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Portanto,

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{6.15}$$

Desta forma, uma estratégia ótima para o jogador C é:

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

Assim temos que

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

são estratégias ótimas para os jogadores L e C respectivamente. Devemos considerar ainda que quando ambos os jogadores utilizarem suas estratégias ótimas, o valor do jogo é o mesmo para os dois, ou seja, $v = v'$.

Temos que, quando o problema dual é resolvido pelo método simplexo, o quadro final vai conter a estratégia ótima para L na linha objetiva debaixo da coluna das variáveis de folga, isto é, y_1 está na linha objetiva abaixo da primeira variável de folga, y_2 está na linha objetiva debaixo da segunda variável de folga.

Exemplo 6.1 *O jogador L tem duas cartas de baralho: um ás de paus ($1\clubsuit$) e um quatro de copas ($4\heartsuit$) . O jogador C também tem duas cartas: um dois de paus ($2\clubsuit$) e um três de copas ($3\heartsuit$). Cada jogador seleciona, secretamente, uma de suas cartas. Se ambas as cartas selecionadas são do mesmo naipe, o jogador C paga ao jogador L a soma dos valores numéricos das cartas em dinheiro. Se as cartas são de naipes diferentes, o jogador L paga ao jogador C a soma dos valores numéricos das cartas.*

A matriz de pagamentos para esse jogo é:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2\clubsuit & 3\heartsuit \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\clubsuit \\ 4\heartsuit \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{array}\right] \end{array}.$$

Do teorema 6.1 temos como estratégia ótima para o jogador L;

$$\mathbf{p}^* = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{array} \right]$$

o que nos dá:

$$\mathbf{p}^* = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{7 - (-6)}{3 + 7 - (-4) - (-6)} & \dfrac{3 - (-4)}{3 + 7 - (-4) - (-6)} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{p}^* = \left[\begin{array}{cc} \frac{13}{20} & \frac{7}{20} \end{array} \right]$$

e a estratégia ótima para o jogador C é:

$$\mathbf{q}^* = \left[\begin{array}{c} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{array} \right]$$

o que nos dá:

$$\mathbf{q}^* = \left[\begin{array}{c} \dfrac{7 - (-4)}{3 + 7 - (-4) - (-6)} \\ \\ \dfrac{3 - (-6)}{3 + 7 - (-4) - (-6)} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{q}^* = \left[\begin{array}{c} \frac{11}{20} \\ \\ \frac{9}{20} \end{array} \right]$$

e temos portanto que o valor do jogo é:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$v = \frac{3 \cdot 7 - (-4) \cdot (-6)}{3 + 7 - (-4) - (-6)}$$

$$v = -\frac{3}{20}$$

Portanto ao longo do jogo o jogador L paga $\frac{3}{20}$ a cada rodada ao jogador C.

Exemplo 6.2 *Considere o jogo matricial com matriz de pagamentos:*

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para o jogador L temos;

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_1 = \frac{4 - (-1)}{6 + 4 - 3 - (-1)}$$

$$p_1 = \frac{5}{8}$$

e

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_2 = \frac{6 - 3}{6 + 4 - 3 - (-1)}$$

$$p_2 = \frac{3}{8}$$

portanto uma estratégia ótima para L é:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Para o jogador C temos:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_1 = \frac{4 - 3}{6 + 4 - 3 - (-1)}$$

$$q_1 = \frac{1}{8}$$

e

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_2 = \frac{6 - (-1)}{6 + 4 - 3 - (-1)}$$

$$q_2 = \frac{7}{8}$$

desta forma uma estratégia ótima para C é:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

Temos ainda:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$
$$v = \frac{6 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)}{6 + 4 - 3 - (-1)}$$

$$v = \frac{27}{8}.$$

Quando ambos os jogadores usam suas estratégias ótimas, o valor do jogo (o ganho esperado de L) é $\dfrac{27}{8}$. Se essa matriz representa um jogo de soma zero, esse jogo não é imparcial e vai acabar favorecendo o jogador L.

Exemplo 6.3 *Considere o jogo matricial com matriz de pagamentos:*

$$\begin{bmatrix} & 7 & - & 3 \\ - & 5 & - & 2 \end{bmatrix}$$

para o jogador L temos:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_1 = \frac{-2 - (-5)}{7 - 2 - (-3) - (-5)}$$

$$p_1 = \frac{3}{13}$$

e

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$p_2 = \frac{7 - (-3)}{7 - 2 - (-3) - (-5)}$$

$$p_2 = \frac{10}{13}$$

portanto uma estratégia ótima para L é:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{10}{13} \end{bmatrix}.$$

Para o jogador C temos:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_1 = \frac{-2 + 3}{7 - 2 - (-3) - (-5)}$$

$$q_1 = \frac{1}{13}$$

e

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$q_2 = \frac{7-(-5)}{7-2-(-3)-(-5)}$$

$$q_2 = \frac{12}{13}$$

desta forma uma estratégia ótima para C é:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix}$$

temos ainda;

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$v = \frac{7 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-5)}{7-2-(-3)-(-5)}$$

$$v = -\frac{29}{13}.$$

Quando ambos os jogadores usam suas estratégias ótimas, o valor do jogo (o ganho esperado de L) é $-\frac{29}{13}$. Se essa matriz representa um jogo de soma zero, esse jogo não é imparcial e vai acabar favorecendo o jogador C.

Exemplo 6.4 *Para o jogo de cara ou coroa de soma zero do exemplo 5.3, com matriz de pagamentos*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

substituindo em 6.10, 6.11 , 6.14 e 6.15, temos:

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \quad e \quad q_1 = q_2 = \frac{1}{2},\ v = 0.$$

Onde as estratégias ótimas para L e C são respectivamente

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

e por 6.9 e 6.13 temos

$$v = v' = 0.$$

Isso significa que metade do tempo L deve mostrar cara e metade do tempo deve mostrar coroa; analogamente para o jogador C. O valor do jogo é zero, de modo que o jogo é imparcial.

6.1 Generalização da teoria de jogos

Podemos agora generalizar nossa discussão para um jogo com matriz de pagamentos $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. De modo análogo ao teorema 6.1; o jogador L procura encontrar estratégias $p_1, p_2, \ldots, p_m$ e v tais que

$$v \text{ é máximo}$$

sujeito a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}p_1 & + & a_{12}p_2 & + & \ldots & + & a_{m1}p_m & - & v & \geq & 0 \\ a_{21}p_1 & + & a_{22}p_2 & + & \ldots & + & a_{m2}p_m & - & v & \geq & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}p_1 & + & a_{2n}p_2 & + & \ldots & + & a_{mn}p_m & - & v & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{6.17}$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

$$p_1 \geq 0\ , p_2 \geq 0, \ldots, p_m \geq 0,\ v \geq 0$$

Como todos os elementos de A são positivos, podemos supor que $v > 0$. Vamos agora dividir cada vínculo em 6.17 por v e definir:

$$y_i = \frac{p_i}{v}.$$

Note que

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{p_1}{v} + \frac{p_2}{v} + \ldots + \frac{p_m}{v} = \frac{1}{v}(p_1 + p_2 + \ldots + p_m) = \frac{1}{v}$$

Logo v é máximo se e somente se $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ é mínimo. Podemos colocar o problema 6.17, para L, na seguinte forma:

$$\text{Minimize } y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

sujeito a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \ldots & + & a_{m1}y_m & \geq & 1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \ldots & + & a_{m2}y_m & \geq & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \ldots & + & a_{mn}y_m & \geq & 1 \end{array}\right. \tag{6.18}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots,\ y_m \geq 0.$$

Note que 6.18 é um problema de programação linear que tem um vínculo e uma variável a menos do que 6.17.

Analisando agora o problema para C, note que procuramos $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e v' tais que:

$$v' \text{ é mínimo}$$

sujeito a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}q_1 & + & a_{12}q_2 & + & \ldots & + & a_{n1}q_n & - & v' & \leq & 0 \\ a_{21}q_1 & + & a_{22}q_2 & + & \ldots & + & a_{n2}q_n & - & v' & \leq & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}q_1 & + & a_{m2}q_2 & + & \ldots & + & a_{mn}q_n & - & v' & \leq & 0 \end{array}\right. \tag{6.19}$$

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$$

$$q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0, \ldots, q_m \geq 0,\ v' \geq 0.$$

Expandindo a idéia do teorema 6.1 para a matriz do jogo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, e usando o fato de que $v = v'$, podemos dividir cada um dos vínculos em 6.19 por $v = v'$ e definir

$$x_i = \frac{q_i}{v}.$$

Então,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{v}.$$

De modo que v é mínimo se e somente se $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é máximo. O problema 6.19, para L, pode ser colocado, então na forma

$$\text{Maximize } x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

sujeito

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & 1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & 1 \end{array}\right. \tag{6.20}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Note que 6.20 é um problema de programação linear em forma padrão, o dual de 6.18. Temos que, quando 6.20 é resolvido pelo método simplexo, o quadro final vai conter a estratégia ótima para L na linha objetiva debaixo da coluna das variáveis de folga, isto é, y_1 está na linha objetiva abaixo da primeira variável de folga, y_2 está na linha objetiva debaixo da segunda variável de folga, e assim por diante.

6.1.1 Estratégia Dominante

Algumas vezes é possível resolver um jogo matricial reduzindo o tamanho da matriz de pagamentos A. Se cada elemento da r-ésima linha de A é menor ou igual ao elemento correspondente da s-ésima linha de A, então a r-ésima linha de A é chamada **recessiva** e dizemos que a s-ésima linha de A **domina** a r-ésima linha. Se cada elemento da r-ésima coluna de A é *maior ou igual* ao elemento correspondente da s-ésima coluna de A, então a r-ésima coluna de A é chamada recessiva e dizemos que a s-ésima coluna de A **domina** a r-ésima coluna.

Exemplo 6.5 *Dada a matriz de pagamentos*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que a primeira linha é recessiva; a terceira linha domina a primeira. Considere a nova matriz de pagamentos

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a segunda coluna é recessiva; a terceira coluna domina a segunda, pois o jogador C irá jogar na coluna em que o ganho de L será o menor possível.

Considere um jogo matricial no qual a r-ésima linha é recessiva e a s-ésima linha domina a r-ésima. É claro então, que o jogador L sempre vai tender a escolher a s-ésima linha em lugar da r-ésima, já que ele sempre terá um ganho garantido maior ou igual ao obtido ao escolher a r-ésima linha. Então, como a r-ésima linha nunca vai ser escolhida, pode ser retirada do jogo. Suponha agora que a r-ésima coluna é recessiva e que a s-ésima coluna domina a r-ésima. Como o jogador C deseja manter suas perdas no mínimo possível, escolhendo a s-ésima coluna ele vai garantir uma perda menor ou igual à perda ao escolher a r-ésima coluna. Como a r-ésima coluna nunca vai ser escolhida, pode ser retirada do jogo. Essas técnicas, quando aplicáveis, resultam em uma matriz de pagamentos menor.

Exemplo 6.6 *Considere o jogo matricial com matriz de pagamentos*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

como a terceira linha de A domina a primeira, essa última pode ser excluída, obtendo-se

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

como a segunda coluna de A_1 domina a terceira, essa última pode ser excluida, obtendo-se

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

que não tem ponto de sela. A solução do jogo matricial com matriz de pagamentos A_2 pode ser obtida das equações 6.10, 6.11, 6.14, 6.15 e 6.9. Temos

$$p_1 = \frac{0-3}{-2+0-2-3}$$

$$p_1 = \frac{3}{7}$$

$$p_2 = \frac{-2-2}{-2+0-2-3}$$

$$p_2 = \frac{4}{7}$$

$$q_1 = \frac{0-2}{-2+0-2-3}$$

$$q_1 = \frac{2}{7}$$

$$q_2 = \frac{-2-3}{-2+0-2-3}$$

$$q_2 = \frac{5}{7}$$

e

$$v = \frac{-2\cdot 0 - 2\cdot 3}{-2+0-2-3}$$

$$v = \frac{6}{7}.$$

Como em A, a matriz de pagamentos original, excluímos a primeira linha e a terceira coluna, obtemos

$$\boldsymbol{p}^* = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{array}\right]$$

como estratégia ótima para o jogador L. Analogamente,

$$\boldsymbol{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma estratégia ótima para o jogador C.

Conclusão

Neste trabalho, a teoria de Programação Linear foi aplicada à Teoria de Jogos para então encontrar condições necessárias para a existência de estratégias ótimas que garantam o maior ganho possível para cada jogador. Mostrando assim que o teorema fundamental para jogos matriciais garante a existência de estratégias ótimas e que o valor do jogo é o mesmo para ambos os jogadores.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. ***Álgebra Linear***. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1982.

[2] BRANDENBURGER, Adam; NALEBUFF, Barry. ***Co-opetition***. New York: Currency, 1996. 290p.

[3] KOLMAN, Bernard; HILL, David. ***Introdução à Álgebra Linear com aplicações***. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1998.

[4] KRASOVSKU, N. N. (Nikolai Nikolaevich); SUBBOTIN, A. I. (Andrei Izmailovich). ***Game-theoretical control problems***. New York: Springer, 1988. 517p.

[5] MACULAN FILHO, Nelson; PEREIRA, Mario Veiga Ferraz. ***Programação Linear***. São Paulo: Atlas, 1980. 182p.

[6] PUCCINI, Abelardo de Lima. ***Introdução à Programação Linear***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1987. 248p.

[7] RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alipio. ***Programação Linear***. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, 1984- 2v.

[8] RAPOPORT, Anatol. ***Theorie des jeux a deux persones: les principes essentiels***. Paris: Dunod, 1969. 177p.

[9] STAHL, Saul. ***A Gentle Introduction to Game Theory***. American Mathematical Society, vol. 13, 1998.

[10] THIE, Paul R. ***An introduction to linear programming and game theory***. New York: J. Wiley, 1979. 335p.